А.С. Кутузов

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Троицкий филиал Челябинского государственного университета

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \Delta u(x,y,t), \tag{1}$$

в котором $x, y \in K$, K – кольцо, ограниченное окружностями Γ_1 и Γ_2 с радиусами r_1 и r_2 соответственно, $t \ge 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,y,0) = 0, \quad x, y \in K, \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad t \ge 0, \tag{3}$$

$$u\big|_{\Gamma_0} = f(t); \quad \Gamma_0 = \left\{x, y \in K : x^2 + y^2 = r_0^2, r_1 < r_0 < r_2\right\}, t \ge 0, \tag{4}$$

а граничное значение $\left|grad\, u\right\|_{\Gamma_2}$ функции $u(x,y,t)$ подлежит определению.

Будем искать осесимметричные решения этой задачи, то есть такие, что

$$u(x,y,t) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}, t\right). \tag{5}$$

Выполним замену переменной $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Тогда задача (1)–(4) сводится к следующей:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \quad t \ge 0, \quad r_1 \le z \le r_2, \tag{6}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad r_1 \le z \le r_2, \tag{7}$$

$$u\big|_{z=r_1} = 0, \quad t \ge 0, \tag{8}$$

$$u\big|_{z=r_0} = f(t), \quad t \ge 0, \quad r_1 < r_0 < r_2, \tag{9}$$

а определить требуется $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=r_2} = u'(r_2,t)$ при $t \ge 0$.

Задача (6)–(9) является некорректно поставленной.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in L_2\left[0,\infty\right)$ существует точное решение $u'_0(r_2,t) \not\equiv 0$ поставленной задачи, которое принадлежит пространству $W_2^1\left[0,\infty\right)$, причем $u'_0(r_2,t) \in M_r$, где

$$M_r = \left\{\varphi \in W_2^1\left[0,\infty\right) : \|\varphi\|_{W_2^1} \le r\right\}. \tag{10}$$

Однако точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2\left[0,\infty\right)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \le \delta. \tag{11}$$

Требуется, используя исходные данные $f_\delta, \delta,$ и M_r задачи (6)–(9) построить приближенное решение $u'_\delta(t)$, а также оценить его уклонение $\|u'_0 - u'_\delta\|_{L_2}$ от точного решения $u'_0(t) = u'_0(r_2, t)$.

Используя метод разделения переменных и теорию функций Бесселя [см. 1], можно показать, что к задаче (6)–(9) можно применять преобразование Фурье по t в предположении, что

$$u(z,t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \tag{12}$$

2. Сведение задачи (6)–(9) к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Учитывая (12), в качестве рабочего пространства $\overline{H}$ возьмем комплексный вариант $L_2[0,\infty)$ над полем действительных чисел, то есть его элементы имеют вид $u(t) + iv(t)$, где $u, v \in L_2[0,\infty)$ и норма в нем определяется по формуле $\|u+iv\|_{\overline{H}}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|v\|_{L_2}^2$. Тогда пространство $\overline{H}$ будет гильбертовым, а преобразование Фурье на нем определим формулой

$$F[u(t)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u(t) e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \ge 0. \tag{13}$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [2], следует изометричность преобразования F, определенного формулой (13).

Применяя к уравнению (6), с учетом условия (12), преобразование Фурье F, получаем

$$\frac{d^2 \hat{u}(z,\tau)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\hat{u}(z,\tau)}{dz} = i\tau \hat{u}(z,\tau); \quad \tau \ge 0, \quad r_1 \le z \le r_2, \tag{14}$$

где $\hat{u}(z,\tau) = F[u(z,t)]$.

Для уравнения (14) поставим задачу, добавив условия

$$\hat{u}(r_1,\tau) = 0, \quad \tau \ge 0, \tag{15}$$

$$\hat{u}(r_0,\tau) = \hat{f}(\tau), \quad \tau \ge 0, \tag{16}$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$.

Из (14)–(16) требуется определить $\hat{u}'(\tau), \quad \tau \ge 0.$

Выполним замену

$$\hat{u}(z,\tau) = \hat{v}(z,\tau) \cdot z^{-\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

предложенную в [1, с.131], чтобы привести уравнение (14) к “нормальному” виду.

После преобразований задача (14)–(16) сводится к следующей:

$$\frac{d^2 \hat{v}(z,\tau)}{dz^2} + \frac{1}{4z^2}\hat{v}(z,\tau) = i\tau \hat{v}(z,\tau); \quad \tau \ge 0, \quad r_1 \le z \le r_2, \tag{18}$$

$$\hat{v}(r_1,\tau) = 0, \quad \tau \ge 0, \tag{19}$$

$$\hat{v}(r_0,\tau) = \hat{f}(\tau)\sqrt{r_0}, \quad \tau \ge 0. \tag{20}$$

Далее, пусть

$$z = \theta + r_1, \quad \hat{v}(\theta + r_1, \tau) = \hat{w}(\theta,\tau). \tag{21}$$

Тогда из (18)–(20) имеем

$$\frac{d^2 \hat{w}(\theta,\tau)}{d\theta^2} + \frac{1}{4(\theta + r_1)^2}\hat{w}(\theta,\tau) = i\tau \hat{w}(\theta,\tau); \quad \tau \ge 0, \quad 0 \le \theta \le r_2 - r_1, \tag{22}$$

$$\widehat{w}(0,\tau)=0, \quad \tau \ge 0, \tag{23}$$

$$\widehat{w}(r_0-r_1,\tau)=\widehat{f}(\tau)\sqrt{r_0}, \quad \tau \ge 0, r_1 \le r_0 \le r_2. \tag{24}$$

Тривиально показывается, что решение задачи (22), (23) линейно зависит от решения задачи

$$\frac{d^2 e(\theta,\tau)}{d\theta^2}+\frac{1}{4(\theta+r_1)^2}e(\theta,\tau)=i\tau e(\theta,\tau); \quad \tau \ge 0, \quad 0 \le \theta \le r_2-r_1, \tag{25}$$

$$e(0,\tau)=0, \quad \tau \ge 0, \tag{26}$$

$$e'_\theta(0,\tau)=1, \quad \tau \ge 0, \tag{27}$$

то есть имеет место соотношение

$$\widehat{w}(\theta,\tau)=l(\tau)e(\theta,\tau), \quad \tau \ge 0, \theta \in [0,r_2-r_1], \tag{28}$$

где $l(\tau)$ – произвольная функция.

Используя (24), находим

$$l(\tau)=\frac{\widehat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0-r_1,\tau)}, \quad \tau \ge 0. \tag{29}$$

Из (17), (21), (28), (29) следует, что

$$\hat{u}(z,\tau)=\frac{\widehat{f}(\tau)\sqrt{r_0}}{e(r_0-r_1,\tau)}e(z-r_1,\tau)z^{-\frac{1}{2}}, \quad z \in [r_1,r_2], \tau \ge 0. \tag{30}$$

Из (30) не составляет труда найти $\hat{u}'(r_2,\tau)$.

Переходим к оценке полученного решения. Из (28) следует, что

$$\widehat{w}'(\theta,\tau)=l(\tau)e'(\theta,\tau), \quad \tau \ge 0, \theta \in [0,r_2-r_1], \tag{31}$$

где производная берётся по переменной θ.

Далее рассмотрим пространство $H_0=L_2[0,r_0-r_1]$ над полем комплексных чисел ($r_0>r_1$) и оператор $A_1: H_0 \to H_0$, определяемый формулами

$$A_1 u=\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{1}{4(\theta+r_1)^2}u, u \in D(A_1), \text{ где } D(A_1)=\{u : u, A_1 u \in H_0, u(0)=u(r_0-r_1)=0\} \tag{32}$$

В работе [3] указано, что при условии $\frac{r_0}{r_1}<2\pi+1$ нулевая точка не принадлежит спектру оператора A_1. В этом случае справедлива

Теорема 1. При условии $\frac{r_0}{r_1}<2\pi+1$ функция $l(\tau)$, определённая формулой (29) непрерывна.

Доказательство теоремы приведено в [3].

3. Оценка величин $|e_1(\theta,\tau)|$ и $|e'_1(\theta,\tau)|$. Перепишем уравнение (25) в виде $\frac{d^2e(\theta,\tau)}{d\theta^2}-i\tau e(\theta,\tau)=-\frac{1}{4(\theta+r_1)^2}e(\theta,\tau)$. Решая полученное уравнение методом вариации постоянных и используя условия (26), (27), сведем задачу (25)–(27) к следующему интегральному уравнению

$$e_1(\theta,\lambda)=\frac{sh\mu_0\lambda\theta}{\mu_0\lambda}-\int_0^\theta \frac{sh\mu_0\lambda(\theta-\xi)}{\mu_0\lambda}\frac{1}{4(\xi+r_1)^2}e_1(\xi,\lambda)d\xi, \tag{33}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad \theta, \xi \in [0, r_2 - r_1], \quad \lambda = \sqrt{\tau} \ge 0, \quad e_1(\theta, \lambda) = e(\theta, \tau)$.

Теорема 2. Существуют числа $\lambda_0 > 0$, $c_1 > 0, c_2 > 0$ такие, что для любого $\lambda \ge \lambda_0$ выполняется неравенство: $c_1 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda} \le |e_1(\theta, \lambda)| \le c_2 \frac{e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}}{\lambda}$.

Доказательство приведено в [3]. Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. При значении $\lambda_0 > 0$, найденном в предыдущей теореме, существуют числа $c_3 > 0, c_4 > 0$ такие, что для всех $\lambda \ge \lambda_0$ выполняется неравенство

$$c_3 e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda} \le |e'_1(\theta, \lambda)| \le c_4 e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\lambda}.$$

Возвращаясь к переменной τ, получаем, что при $\tau \to +\infty$ имеет место оценка

$$c_3 e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}} \le |e'(\theta, \tau)| \le c_4 e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}}. \tag{34}$$

В работе [3] доказано, что для функции $l(\tau)$ выполняются оценки:

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2} \le c_5 \delta \text{ при } \tau \in \left[0, \lambda_0^2\right] \tag{35}$$

и

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2} \le c_6 \delta \text{ при } \tau \in \left[\lambda_0^2, +\infty\right), \tag{36}$$

где $c_5^2 = \max\limits_{\tau \in [0, \lambda_0^2]} \left(\frac{r_0}{|e(r_0 - r_1, \tau)|^2} \right)$, $c_6^2 = \sup\limits_{\tau \in [\lambda_0^2, +\infty)} \left(\frac{r_0 \tau}{c_1^2 e^{\sqrt{2}(r_0 - r_1)\sqrt{\tau}}} \right)$.

Из (35), (36) следует, что

$$\|l_\delta(\tau) - l_0(\tau)\|_{L_2} \le \delta \sqrt{c_5^2 + c_6^2}. \tag{37}$$

4. Применение метода проекционной регуляризации. Используя формулу (31) и обозначив $\widehat{w}'(r_2 - r_1, \tau) = \widehat{w}(\tau)$, перепишем нашу задачу в виде операторного уравнения

$$A\widehat{w}(\tau) = \frac{1}{e'(r_2 - r_1, \tau)} \widehat{w}(\tau) = l(\tau), \tag{38}$$

где $A : \overline{H} \to \overline{H}$.

Пусть $\widehat{w}_0(\tau) \in W_2^1[0, \infty]$ – точное решение задачи (38), соответствующее правой части $l_0(\tau)$, тогда пусть найдется постоянная $a > 0$ такая, что $\|\widehat{w}_0\|_{L_2}^2 + \|\widehat{w}'_0\|_{L_2}^2 \le a^2$.

Определим $\widehat{w}_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty w_0(t) e^{-i\tau t} dt.$ Тогда $\widehat{w}'_0(\tau) = i\tau \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty w_0(t) e^{-i\tau t} dt = i\tau \widehat{w}_0(\tau).$ Значит, для точного решения справедливо неравенство: $\left(1 + \tau^2\right) \|\widehat{w}_0\|_{L_2}^2 \le a^2$.

Задача (38) распадается на две: первая из них – на отрезке $\tau \in \left[0, \lambda_0^2\right] = [0, \tau_0]$ – корректна, для неё сразу получаем оценку приближённого решения с учётом (35): $\|\widehat{w}_0 - \widehat{w}_\delta\| \le c_7 c_5 \delta$, где $c_7 = \left(\max\limits_{\tau \in [0, \tau_0]} |e'(r_2 - r_1, \tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Вторая же задача – на полуинтервале $\tau \in [\tau_0, +\infty)$ – является задачей вычисления значений неограниченного оператора, а потому некорректна.

Из теоремы 3 и формулы (38) следует инъективность операторов A и A^*, поэтому в силу леммы 6, сформулированной в работе [4], существует изометрический оператор $Q:\overline{H}\to\overline{H}$ такой, что $A\widehat{w}(\tau)=QC\widehat{w}(\tau)$, где

$$C\widehat{w}(\tau)=\left|\frac{1}{e'(r_2-r_1,\tau)}\right|\widehat{w}(\tau), \tag{39}$$

то есть оператор C положителен и самосопряжен.

Таким образом, уравнение (38) может быть приведено к виду

$$C\widehat{w}(\tau)=\hat{l}_\delta(\tau), \tag{40}$$

в котором $\hat{l}_\delta(\tau)=Q^*l_\delta(\tau)$, а Q^* – оператор, сопряженный с $Q(\tau)=\dfrac{\left|e'(r_2-r_1,\tau)\right|}{e'(r_2-r_1,\tau)}$.

Из сказанного выше следует, что, при $\hat{l}_0(\tau)=Q^*l_0(\tau)$ уравнение (40) имеет точное решение $\widehat{w}_0(\tau)\in B\overline{S}_a$, где $\overline{S}_a=\left\{\hat{\gamma}:\hat{\gamma}\in\overline{H},\left\|\hat{\gamma}\right\|\le a\right\}$, $\tau\ge\tau_0$, а

$$B\hat{\gamma}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\hat{\gamma}(\tau),\quad \tau\ge\tau_0,\hat{\gamma}(\tau)\in\overline{H}. \tag{41}$$

Из формул (39)–(41) следует, что $B=g(C)$, где функция $g(\sigma)$ является строго возрастающей, непрерывной, удовлетворяющей условию $g(0)=0$ (см. [4]).

Используя теорему 3 и формулы (39), (41), можно показать, что имеет место эквивалентность:

$$g(\sigma)\sim\frac{\left(r_2-r_1\right)^2}{2}\ln^{-2}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\text{ при }\sigma\to 0. \tag{42}$$

Используя метод проекционной регуляризации, предложенный в [4], регуляризуем исходные данные задачи $\left(\hat{l}_\delta(\tau),\delta\right)$, то есть, определим функцию $\hat{l}_\delta\left[\tau,\widehat{\alpha}(\delta)\right]$ следующим образом:

– при условии $\left\|\hat{l}_\delta\right\|>3c_6\delta$ определим $\hat{l}_\delta\left[\tau,\widehat{\alpha}(\delta)\right]=\begin{cases}\hat{l}_\delta(\tau) & \text{при}\quad \tau\le\widehat{\alpha}(\delta)\\ 0 & \text{при}\quad \tau>\widehat{\alpha}(\delta)\end{cases}$, где $\widehat{\alpha}(\delta)$ удовлетворяет уравнению $\int\limits_{\widehat{\alpha}(\delta)}^{\infty}\left|\hat{l}_\delta(\tau)\right|^2d\tau=9c_6^{\,2}\delta^2$.

– при условии $\left\|\hat{l}_\delta\right\|\le 3c_6\delta$ определим $\hat{l}_\delta\left[\tau,\widehat{\alpha}(\delta)\right]\equiv 0.$

При выполнении этих условий функция $\hat{l}_\delta\left[\tau,\widehat{\alpha}(\delta)\right]$ определяется однозначно даже в случае неединственности решения уравнения из первого условия.

Далее, приближенное решение $\widehat{w}_\delta(\tau)$ уравнения (40) определим формулой

$$\widehat{w}_\delta(\tau)=C^{-1}\hat{l}_\delta\left[\tau,\widehat{\alpha}(\delta)\right], \tag{43}$$

где оператор C определен формулой (39).

В силу леммы 13 из работы [4] найдется постоянная c_8 такая, что при $\tau\ge\tau_0$ справедлива оценка

$$\left\|\widehat{w}_\delta-\widehat{w}_0\right\|\le c_8\ln^{-2}\left(\frac{1}{c_6\delta}\right). \tag{44}$$

Из теоремы, сформулированной в работе [4] следует, что оценка (44) является точной по порядку на классе $B\overline{S}_a$, а соответствующий метод проекционной регуляризации оптимален по порядку на этом классе решений.

Из замены (21) следует, что $\left\|\hat{v}'_\delta - \hat{v}'_0\right\| \le c_8 \ln^{-2}\left(\frac{1}{c_6\delta}\right)$.

Тогда из замены (17) получаем, что

$$\left\|\hat{u}'_\delta - \hat{u}'_0\right\| \le r_2^{-\frac{1}{2}}\left\|\hat{v}'_\delta - \hat{v}'_0\right\| + \frac{1}{2} r_2^{-\frac{3}{2}}\left\|\hat{v}_\delta - \hat{v}_0\right\|. \tag{45}$$

Из основного результата статьи [3] следует, что $\left\|\hat{v}_\delta - \hat{v}_0\right\| \le l_1 \ln^{-2}\left(\frac{1}{l_2\delta}\right)$, где l_1 и l_2 – постоянные, определённые в [3].

Тогда оценка приближённого решения задачи при всех $\tau \ge 0$, имеет вид:

$$\left\|\hat{u}'_\delta - \hat{u}'_0\right\|^2 \le c_7^{\,2} c_5^{\,2} \delta r_2^{-1} + \left(r_2^{-\frac{1}{2}} c_8 \ln^{-2}\left(\frac{1}{c_6\delta}\right) + \frac{1}{2} r_2^{-\frac{3}{2}} l_1 \ln^{-2}\left(\frac{1}{l_2\delta}\right)\right)^2. \tag{46}$$

Чтобы окончательно получить приближенное решение $u'_\delta(t)$ исходной задачи (6)–(9) (а значит и (1)–(4)), используем обратное к F преобразование F^{-1} и получим $u'_\delta(t) = \mathrm{Re}\left\{F^{-1}\left[\hat{u}'_\delta(\tau)\right]\right\}$.

Поскольку преобразование F изометрично, то для приближённого решения $u'_\delta(t)$ оценка (46) останется в силе.

Литература

1. Ватсон, Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. – 748с.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа/ А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1972. – 496с.
3. Кутузов, А.С. Точная по порядку оценка приближенного решения обратной задачи для уравнения теплопроводности на кольце/ А.С. Кутузов // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математика, физика, химия». – 2007. – Вып.9. – №19(91) – с.30–36.
4. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач/ В.П. Танана // Сиб. журнал вычисл. матем. – 2004. – т.7. – №2. – с.117–132.