Федеральное агентство по образованию
Троицкий филиал государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

Кафедра математики и информатики

А.С. Кутузов, С.М. Серебрянский

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Учебное пособие

Троицк 2010

Утверждено на заседании кафедры
математики и информатики
Протокол № 4 от «20» декабря 2009 г.

Одобрено учебно-методической комиссией Троицкого филиала
ГОУ ВПО «Челябинский государственный университет»

Специальность: 010501 – Прикладная математика и информатика

Составители: А. С. Кутузов, преподаватель кафедры математики и информатики,
С. М. Серебрянский, преподаватель кафедры математики и информатики

Рецензент: В.Н. Павленко, д.ф.-м.н., профессор кафедры вычислительной математики ГОУ ВПО «Челябинский государственный университет».

Учебное пособие составлено на основе программы дисциплины «Математический анализ» (утверждена на заседании кафедры математики и информатики протоколом №1 от 13.09.2004). В пособии изложен теоретический и практический материал по теме «Числовые ряды», изучаемой студентами специальности «Прикладная математика и информатика». Пособие отличает конспективная краткость и простота изложения. Может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов, а также для подготовки студентов к государственному экзамену.

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. ТЕОРИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

1.1. Основные определения и простейшие свойства числовых рядов

Определение: выражение вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$ называется числовым рядом (далее, просто рядом). Элемент a_k называется общим или $k-$м членом ряда.

Определение: сумма $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется частичной суммой ряда.

Определение: если последовательность $\{s_n\}$ сходится, то ряд называется сходящимся. Если же $\{s_n\}$ не имеет предела или стремится к ∞, то ряд называется расходящимся.

Определение: предел $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ последовательности частичных сумм, если он существует, называется суммой ряда. Таким образом: $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Теорема (критерий Коши сходимости ряда): ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall m \geq n > N \ \ |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| < \varepsilon$.

Доказательство: по определению ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм. Т.к. $\{s_n\}$ – это уже числовая последовательность, то для нее справедлив критерий Коши сходимости числовой последовательности: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \ \forall m \geq n > N$ $|s_n - s_m| < \varepsilon$.

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| =$$

$$= |(a_1 + a_2 + ... + a_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m)| =$$

$$= |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Замечание: Предположим, что мы изменили (или удалили) некоторое количество членов ряда. Если в доказанном критерии Коши считать, что число N превышает максимальный из номеров измененных (удаленных) членов ряда, то, очевидно, что если в ряде изменить (удалить) конечное число членов, то сходимость или расходимость ряда не изменится.

Замечание: полезно записать условие отрицания критерия Коши: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится тогда и только тогда, когда $\exists \varepsilon > 0$: $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m \geq n > N$ $\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| > \varepsilon$.

Теорема (необходимое условие сходимости ряда): для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю, т.е. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Доказательство: очевидно, что $a_n = s_n - s_{n-1}$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = S$.

Но тогда $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1} = S - S = 0$.

Теорема доказана.

Замечание: обратное утверждение в общем случае неверно, т.е. из условия $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ может не следовать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Примеры:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ – сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Пусть $|q| \geq 1$, тогда $|q^n| = |q|^n \geq 1$ и, значит, $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, т.е. не выполнено необходимое условие сходимости, значит, при $|q| \geq 1$ ряд расходится.

Пусть $|q| < 1$, тогда $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Необходимое условие сходимости ряда выполнено и если $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$, то $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$, значит при $|q| < 1$ ряд сходится и его сумма равна $S = \frac{1}{1-q}$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ – гармонический ряд.

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то необходимое условие сходимости ряда выполнено. Однако, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ является расходящимся в силу невыполнения для него условия критерия Коши (см. раздел 2, пример 2.2.1).

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Предел $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ не существует (поскольку $\overline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^{n+1} = 1$ и $\underline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^{n+1} = -1$, т.е. верхний и нижний пределы не равны), значит, необходимое условие сходимости ряда не выполнено и ряд расходится. Кроме того, нетрудно непосредственно заметить, что последовательность частичных сумм данного ряда имеет вид $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$, т.е. является расходящейся.

Сгруппируем члены ряда следующим образом: $\underbrace{(1-1)}_{a_1}+\underbrace{(1-1)}_{a_2}+\underbrace{(1-1)}_{a_3}+\ldots$, тогда очевидно, что такой ряд уже будет являться сходящимся, причем его сумма $S=0$.

Сгруппируем иначе: $\underbrace{1}_{a_1}+\underbrace{(-1+1)}_{a_2}+\underbrace{(-1+1)}_{a_3}+\ldots$, тогда ясно, что полученный ряд сходится, причем $S=1$.

Наконец, переставим все члены -1 на две позиции вправо и получим ряд $1+1-1+1-1+1-1+\ldots$, который при группировке вида $\underbrace{1}_{a_1}+\underbrace{1}_{a_2}+\underbrace{(-1+1)}_{a_3}+\underbrace{(-1+1)}_{a_4}+\ldots$ также является сходящимся и имеет сумму $S=2$.

Этот пример показывает, что при рассмотрении вопросов, связанных с бесконечными суммами, порядок следования слагаемых, а также способы сложения могут влиять на результат сложения в отличие от конечных сумм.

Теорема (о линейности сходящихся рядов):

1. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\forall c\in\mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ также сходится, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ также сходится, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k+\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство:

1. Обозначим $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Т.к. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по условию, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$, значит по свойствам пределов $\exists\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = c\lim\limits_{n\to\infty} s_n = cS$.

2. Доказательство аналогичное, только используется свойство предела суммы быть равным сумме пределов.

Теорема доказана.

Определение: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Замечание: поскольку $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_m|$, то из критерия Коши для рядов следует, что абсолютно сходящийся ряд всегда сходится. Обратное в общем случае неверно.

Определение: ряд называется условно сходящимся, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Пример:

Ряд вида $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + ...$ является сходящимся, поскольку его частичные суммы $s_n = \begin{cases} 0, \text{ при четном } n \\ \frac{1}{n}, \text{ при нечетном } n \end{cases}$ и в любом случае $s_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Ряд из модулей $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ...$ расходится, поскольку для него не выполнено условие критерия Коши сходимости ряда (это обосновывается совершенно аналогично гармоническому ряду из примера 2, рассмотренного выше).

Таким образом, рассматриваемый ряд сходится, но не сходится абсолютно, т.е. является условно сходящимся.

Определение: пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Остатком этого ряда R_n называется ряд, получаемый из данного путем отбрасывания его первых n членов, т.е. $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$

Теорема (об остатке сходящегося ряда): если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, R_n – его остаток, то $R_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Доказательство: по условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, значит, его сумма $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует. Пусть $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ – частичная сумма ряда, тогда по определению сходимости ряда $s_n \underset{n\to\infty}{\to} S$, т.е. $s_n - S \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Осталось лишь заметить, что $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = S - s_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Теорема доказана.

1.2. Ряды с неотрицательными членами

Теорема Вейерштрасса (критерий сходимости ряда с неотрицательными членами): ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого – неотрицательные числа, сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство: по определению сходимости ряда достаточно установить критерий сходимости последовательности $\{s_n\}$ его частичных сумм.

Заметим, что, во-первых $\{s_n\}$ – это уже числовая последовательность, а во-вторых, она монотонно неубывающая, т.к. $s_1 \le s_2 \le s_3 \le \ldots \le s_n \le \ldots$ в силу условия неотрицательности членов ряда. Таким образом, для $\{s_n\}$ справедлив критерий Вейерштрасса и, значит, $\{s_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.

Теорема доказана.

Теорема (первый признак сравнения): пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда с неотрицательными членами, причем $\exists K \in \mathbb{N}:\ \forall k > K\ \ a_k \le b_k$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство: поскольку конечное число членов ряда не влияет на его сходимость, то можно считать, что $\forall k \in \mathbb{N}\ \ a_k \le b_k$. Тогда очевидно, что $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n$.

Докажем первое утверждение теоремы.

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, тогда последовательность его частичных сумм $\{B_n\}$ стремится к некоторому пределу B, являясь при этом неубывающей. Поскольку $b_k \ge 0$, то очевидно, что $\sum_{k=1}^{n} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ A_n \le B_n \le B$. Таким образом последовательность $\{A_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ является ограниченной сверху и монотонно неубывающей, значит в силу предыдущей теоремы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Докажем второе утверждение теоремы.

Дано, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. Предположим противное, т.е. что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Но тогда, по только что доказанному, из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а это противоречит расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, значит предположение неверно и значит ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Теорема доказана.

Пример:

Очевидно, что при $k \geq 2$ справедливо неравенство $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ и сосчитаем его частичную сумму:

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, что $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$, значит, ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится, причем его сумма равна $\frac{1}{2}$. Аналогично рассуждая, находим, что $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 1$.

Согласно первому утверждению признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, более того, его сумма заключена в интервале $\left(\frac{1}{2},1\right)$, а поскольку конечное число слагаемых на сходимость не влияет, то заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится.

Замечание: условие неотрицательности слагаемых ряда в первом признаке сравнения – важно! К примеру, если возьмем $a_k = -k$, $b_k = 0$, то $a_k < b_k$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, очевидно, сходится, но при этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – расходится, т.к. для него не выполнено необходимое условие сходимости $\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty\right)$.

Теорема (второй признак сравнения): пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда с неотрицательными членами, причем $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = A > 0$. Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство: поскольку $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = A > 0$, то по определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \in \mathbb{N}$: $\forall k > K$ $\left|\frac{a_k}{b_k} - A\right| < \varepsilon$, откуда

$$-\varepsilon + A < \frac{a_k}{b_k} < \varepsilon + A \text{ или}$$

$$(-\varepsilon + A)b_k < a_k < (\varepsilon + A)b_k .$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то по теореме о линейности сходящихся рядов $\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon + A)b_k$ также сходится, значит, по первому признаку сравнения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

сходится. Если же $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, то расходится и $\sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon + A) b_k$, значит, по первому признаку сравнения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Теорема доказана.

Теорема (признак разрежения Коши): если $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$

Доказательство: по условию имеем очевидные неравенства

$$a_2 \leq a_2 \leq a_1$$

$$2a_4 = a_4 + a_4 \leq a_3 + a_4 \leq a_2 + a_2 = 2a_2$$

$$4a_8 = a_8 + a_8 + a_8 + a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq a_4 + a_4 + a_4 + a_4 = 4a_4$$

$$\ldots$$

$$2^k a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}} \leq 2^k a_{2^k}$$

Сложим эти неравенства почленно и получим неравенство:

$$a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^k a_{2^{k+1}} \leq a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2^{k+1}} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}.$$

Обозначим $A_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, $S_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}$, тогда полученное неравенство принимает вид $\frac{1}{2}(S_{k+1} - a_1) \leq A_{2^{k+1}} - a_1 \leq S_k$.

Последовательности $\{A_k\}$ и $\{S_k\}$ представляют собой последовательности частичных сумм рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ соответственно, причем они обе неубывающие. Кроме того, из полученных неравенств следует, что $\{A_k\}$ и $\{S_k\}$ одновременно либо ограничены, либо неограничены сверху. По критерию сходимости рядов с неотрицательными членами заключаем, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема доказана.

Теорема (об обобщенном гармоническом ряде): ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Доказательство: если $p > 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, значит, он сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{\left(2^k\right)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-kp} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{1-p}\right)^k .$$

Обозначим $2^{1-p} = q$, тогда получим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, о котором уже известно, что он сходится при $q < 1$, т.е. при $2^{1-p} < 1$, т.е. при $1 - p < 0$ и, наконец, при $p > 1$; расходится при $q \ge 1$, т.е. при $p \le 1$.

Осталось рассмотреть случай $p \le 0$, но в этом случае $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{|p|}$. Очевидно, что $\forall k \ge 1 \;\; k^{|p|} \ge 1$.

Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{|p|}$ сходится, тогда в силу необходимого условия сходимости ряда $\lim\limits_{k \to \infty} k^{|p|} = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in \mathbb{N}: \; \forall k > K \;\; k^{|p|} < \varepsilon$ (в силу положительности слагаемых ряда модуль в определении предела опустили). Взяв $\varepsilon < 1$, получаем противоречие с неравенством $k^{|p|} \ge 1$, значит предположение о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{|p|}$ в этом случае неверно.

Теорема доказана.

1.3. Общие признаки сходимости рядов

Теорема (мажорантный признак Вейерштрасса): пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда, причем $\exists K \in \mathbb{N}$: $\forall k > K$ $|a_k| \le b_k$. Тогда если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно.

Доказательство: рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Для них выполнены все условия первого признака сравнения, значит, из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, а значит и абсолютная сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема доказана.

Пример: исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$.

Ясно, что $\left|\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$, кроме того, в примере выше установлено, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, значит, в силу мажорантного признака Вейерштрасса, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ также сходится.

Теорема (признак Коши): пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и число $\alpha = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. Тогда справедливы утверждения:

1. Если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится;

2. Если $\alpha > 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

3. Если $\alpha = 1$, то ряд может сходиться или расходиться.

Доказательство:

1. Если $\alpha < 1$, то очевидно, что $\exists q \in \mathbb{R}:\ \alpha < q < 1$. Зафиксируем число q.

По определению верхнего предела $\alpha = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{|a_k|}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N$ $\left|\sup\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{|a_k|} - \alpha\right| < \varepsilon$, откуда получаем, что $-\varepsilon < \sup\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{|a_k|} - \alpha < \varepsilon$. Нас будет интересовать только правое неравенство, из которого получаем, что $\sup\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{|a_k|} < \varepsilon + \alpha$.

Поскольку $\alpha < q$, а $\varepsilon > 0$ – любое, то его можно подобрать таким образом, чтобы $\varepsilon + \alpha = q$. Таким образом, получаем, что $\sup\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{|a_k|} < q$, следовательно $\forall k \ge n$ $\sqrt[k]{|a_k|} < q$, т.е. $\forall k \ge n > N$ $|a_k| < q^k$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится при $q < 1$, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, значит для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ выполнены все условия мажорантного признака Вейерштрасса, в силу которого ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно.

2. Поскольку α – частичный предел последовательности $\left\{\sqrt[k]{|a_k|}\right\}$, то существует подпоследовательность $\left\{\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}\right\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} = \alpha$, т.е. по определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}:$ $\forall n > N$

$\left|\sqrt[k_n]{\left|a_{k_n}\right|}-\alpha\right|<\varepsilon$, откуда $-\varepsilon<\sqrt[k_n]{\left|a_{k_n}\right|}-\alpha<\varepsilon$. Нас теперь будет интересовать только левое неравенство, из которого $\sqrt[k_n]{\left|a_{k_n}\right|}>\alpha-\varepsilon$.

Поскольку $\alpha>1$ и $\varepsilon>0$ – любое, то его можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\alpha-\varepsilon>1$. Тогда $\forall n>N$ $\sqrt[k_n]{\left|a_{k_n}\right|}>1$, следовательно $\forall n>N$ $\left|a_{k_n}\right|>1$.

Допустим теперь, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, тогда по теореме о необходимом условии сходимости ряда $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$, значит, нулю должен быть равен предел любой подпоследовательности и, в частности, подпоследовательности $\left\{a_{k_n}\right\}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n}=0$, т.е. $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}:$ $\forall n>N$ $\left|a_{k_n}\right|<\varepsilon$. Ясно, что выбирая $\varepsilon<1$, получаем противоречие с неравенством $\left|a_{k_n}\right|>1$, значит предположение о сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ неверно.

3. Рассмотрим уже известные ряды: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, который расходится, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, который является сходящимся. Сосчитаем α для каждого из них.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}:\ \alpha=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\sqrt[k]{\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}:\ \alpha=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2=1.$$

Теорема доказана.

Пример: исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2+(-1)^k)^k x^k$.

Согласно признаку Коши, сосчитаем

$$\alpha = \overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|(2+(-1)^k)^k x^k\right|} = \overline{\lim_{k\to\infty}}\left|(2+(-1)^k)x\right| = \overline{\lim_{k\to\infty}}\left|2+(-1)^k\right|\left|x\right| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}}\left|2+(-1)^k\right|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|x\right| = \left|x\right|\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}\left|2+(-1)^k\right| = \left|x\right|\lim_{n\to\infty}\left|2+1\right| = 3\left|x\right|.$$

Ряд сходится абсолютно при $\alpha = 3|x| < 1$, т.е. при $|x| < \frac{1}{3}$.

Ряд расходится при $\alpha = 3|x| > 1$, т.е. при $|x| > \frac{1}{3}$.

При $\alpha = 3|x| = 1$, т.е. при $|x| = \frac{1}{3}$ признак Коши ответа не дает, нужно дополнительное исследование.

В данном случае, подставив, например, $x = \frac{1}{3}$ в общий член ряда, получим, что он равен $a_k = (2+(-1)^k)^k \frac{1}{3^k}$. Беря $k = 2n$, выделим подпоследовательность $a_{2n} = (2+1)^{2n}\frac{1}{3^{2n}} = 1$, которая не сходится к нулю, т.е. и сама последовательность $\{a_k\}$ не может сходиться к нулю, а значит не выполнено необходимое условие сходимости ряда, значит, ряд расходится и в этом случае. Для $x = -\frac{1}{3}$ рассуждения проводятся аналогично.

Теорема (признак Даламбера): пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует предел $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \alpha$, тогда:

1. Если $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится;
2. Если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;
3. Если $\alpha = 1$, то ряд может сходиться или расходиться.

Доказательство:

1. Если $\alpha < 1$, то очевидно, что $\exists q \in \mathbb{R}:\ \alpha < q < 1$. Зафиксируем число q.

По условию $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists K \in \mathbb{N}:\ \forall k > K\ \ \left|\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| - \alpha\right| < \varepsilon$, откуда получаем, что $-\varepsilon < \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| - \alpha < \varepsilon$. Нас будет интересовать только правое неравенство, из которого получаем, что $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \varepsilon + \alpha$.

Поскольку $\alpha < q$, а $\varepsilon > 0$ – любое, то его можно подобрать таким образом, чтобы $\varepsilon + \alpha = q$. Таким образом, получаем, что $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$.

Т.к. конечное число членов ряда не влияет на его сходимость, то будем считать, что $\forall k \in \mathbb{N}\ \ \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$. Рассмотрим очевидное соотношение:

$$\underset{\hat{q}}{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}\cdot\underset{\hat{q}}{\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|}\cdot\underset{\hat{q}}{\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right|}\cdot\ldots\cdot\underset{\hat{q}}{\left|\frac{a_2}{a_1}\right|} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_1|}.$$

Отсюда получаем, что $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_1|} < q^k$, следовательно $|a_{k+1}| < |a_1| q^k$.

Поскольку $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, значит, в силу теоремы о свойствах линейности сходящегося ряда, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_1| q^k$, поэтому, в силу мажорантного признака Вейерштрасса, абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$, а значит и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, т.к. он получен из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$ добавлением одного слагаемого a_1.

2. Аналогично п.1 распишем определение предела, только теперь возьмем в нем левое неравенство и получим, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}: \ \forall k > K$ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > \alpha - \varepsilon$.

Поскольку теперь $\alpha > 1$ и $\varepsilon > 0$ – любое, то его можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\alpha - \varepsilon > 1$ и тогда $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$.

Далее, аналогично п.1, учитывая, что конечное число членов ряда не влияет на его сходимость, будем считать, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ и тогда:

$$\underset{1}{\underset{\vee}{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}} \cdot \underset{1}{\underset{\vee}{\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|}} \cdot \underset{1}{\underset{\vee}{\left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right|}} \cdot \ldots \cdot \underset{1}{\underset{\vee}{\left|\frac{a_2}{a_1}\right|}} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_1|},$$

откуда $\frac{|a_{k+1}|}{|a_1|} > 1$, значит $|a_{k+1}| > |a_1|$.

Допустим теперь, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, тогда по теореме о необходимом условии сходимости ряда $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, значит и $\lim_{k\to\infty} a_{k+1} = 0$, поскольку $\{a_{k+1}\}$ – это та же самая последовательность, что и $\{a_k\}$, только без первого члена. Тогда по определению предела $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists K \in \mathbb{N}: \ \forall k > K \ \ |a_{k+1}| < \varepsilon$. Выбрав $\varepsilon < |a_1|$, получим противоречие с неравенством $|a_{k+1}| > |a_1|$, значит предположение о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ неверно.

3. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, который расходится, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, который является сходящимся. Сосчитаем α для каждого из них.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}:\ \alpha=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1\,.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}:\ \alpha=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2=1\,.$$

Теорема доказана.

Пример: исследуем на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$.

Заметим, что при $x=0$ ряд, очевидно, сходится абсолютно, поэтому далее считаем, что $x\neq 0$. Согласно признаку Даламбера, сосчитаем

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|^{k+1}k!}{|x|^k(k+1)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1}=0<1\,.$$

Таким образом, $\forall x\in\mathbb{R}$ ряд абсолютно сходится.

Теорема (неравенство Абеля): пусть даны числа a_k и b_k $(k=\overline{1,n})$, причем $a_k\le a_{k+1}$ (или $a_k\ge a_{k+1}$) и $|b_1+b_2+\ldots+b_m|\le B$ $(m=\overline{1,n})$. Тогда справедливо неравенство $\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\le B\left(|a_1|+2|a_n|\right)$.

Доказательство: обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ и $B_m = \sum_{k=1}^{m} b_k$ $(m = \overline{1,n})$. Тогда нетрудно проверить, что $S_n = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n$ или $S_n = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$.

Тогда $\left|S_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right|\left|B_k\right| + \left|a_n\right|\left|B_n\right|$.

По условию $\left|B_k\right| \le B$ $(k = \overline{1,n})$, значит $\left|S_n\right| \le B\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right| + \left|a_n\right|\right)$.

Если $a_k \le a_{k+1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right| = \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) =$$
$$= a_n - a_1 \le \left|a_n\right| + \left|a_1\right|.$$

Если же $a_k \ge a_{k+1}$, то, аналогично,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k - a_{k+1}\right| = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n \le \left|a_1\right| + \left|a_n\right|.$$

В любом случае, окончательно получаем $\left|S_n\right| \le B\left(\left|a_1\right| + 2\left|a_n\right|\right)$.

Теорема доказана.

Теорема (признак Абеля): если последовательность $\{a_k\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство: в силу критерия Коши сходимости ряда нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}:$ $\forall m \ge n > N$ $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| < \varepsilon$.

По условию $\{a_k\}$ ограничена, значит $\exists c > 0:$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\left|a_k\right| \le c$. Кроме того $\{a_k\}$ монотонна, т.е. $a_k \le a_{k+1}$ (или $a_k \ge a_{k+1}$).

Т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то для него в силу критерия Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall m \geq n > N$ $\left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3c}$.

Таким образом, при $k = \overline{n+1, m}$ для a_k и b_k выполнены все условия теоремы о неравенстве Абеля, значит в силу этой теоремы:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{3c}\left(\underset{c}{\underset{\wedge}{|a_{n+1}|}} + 2\underset{c}{\underset{\wedge}{|a_m|}}\right) < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Пример: исследуем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2}$.

Здесь $a_k = \frac{1}{2^k}$, $b_k = \frac{1}{k^2}$.

Очевидно, что $|a_k| < 1$, значит $\{a_k\}$ ограничена. Кроме того, поскольку $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \ldots > \frac{1}{2^k} > \ldots$, то $\{a_k\}$ монотонно убывает.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, как показано в примерах ранее, является сходящимся. Итак, по признаку Абеля, исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2}$ сходится.

Теорема (признак Дирихле): пусть последовательность $\{a_k\}$ монотонна и стремится к нулю, а последовательность $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничена, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство: в силу критерия Коши сходимости ряда нужно доказать, что $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall m \ge n > N\ \ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| < \varepsilon$.

Т.к. $\{B_n\}$ ограничена по условию, то $\exists c > 0: \forall n \in \mathbb{N}\ \ |B_n| \le c$. Далее, очевидно, что $\left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| = |B_m - B_n| \le |B_m| + |B_n| \le 2c$.

По условию $\{a_k\}$ монотонна, т.е. $a_k \le a_{k+1}$ (или $a_k \ge a_{k+1}$). Кроме того, $a_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, значит по определению предела $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists K \in \mathbb{N}: \forall k > K\ \ |a_k| < \dfrac{\varepsilon}{6c}$.

Таким образом, при $k = \overline{n+1, m}$ для a_k и b_k выполнены все условия теоремы о неравенстве Абеля, значит в силу этой теоремы:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \le 2c\left(\underset{\varepsilon/6c}{\underset{\wedge}{|a_{n+1}|}} + 2\underset{\varepsilon/6c}{\underset{\wedge}{|a_m|}}\right) < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Теорема (признак Лейбница): пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$. Если последовательность $\{a_k\}$ монотонна и стремится к нулю, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ сходится.

Доказательство: сравнивая эту теорему с признаком Дирихле, видим, что достаточно доказать, что последовательность $B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ ограничена.

Очевидно, что $B_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, \text{ при четном } n \\ -1, \text{ при нечетном } n \end{cases}$, значит в любом случае $\forall n \in \mathbb{N}\ \ |B_n| \le 1$ и ограниченность $\{B_n\}$ доказана.

Теорема доказана.

Пример: исследуем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.

Замечаем, что $a_k = \frac{1}{k}$ монотонно убывает и, кроме того, $a_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, значит по признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ сходится.

Заметим, однако, что ряд, составленный из модулей слагаемых, не является сходящимся, поскольку представляет собой гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, для которого выше установлена его расходимость. Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ сходится условно.

Замечание: рассмотренные выше признаки являются основными и позволяют исследовать на сходимость достаточно обширные классы числовых рядов. Однако, помимо рассмотренных, существует также множество других, более частных признаков, с которыми можно ознакомиться подробнее в литературе по математическому анализу.

1.4. Перестановка членов ряда

Теорема (о рядах из положительных и отрицательных слагаемых абсолютно сходящегося ряда): пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, причем $a_k^+ = \begin{cases} a_k, \text{ при } a_k \ge 0 \\ 0, \text{ при } a_k < 0 \end{cases}$ – положительные слагаемые ряда, $a_k^- = \begin{cases} a_k, \text{ при } a_k \le 0 \\ 0, \text{ при } a_k > 0 \end{cases}$ –

его отрицательные слагаемые. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$.

Доказательство:

Необходимость: пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, т.е. по определению сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, значит и сам ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (как всякий абсолютно сходящийся ряд). Тогда по теореме о свойствах линейности сходящихся рядов сходятся также ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_k + |a_k|\right)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_k - |a_k|\right)$.

Т.к. $\frac{1}{2}\left(a_k + |a_k|\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k + a_k), \text{ при } a_k \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_k - a_k), \text{ при } a_k < 0 \end{cases} = a_k^+$, значит $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ сходится.

Аналогично $\frac{1}{2}\left(a_k - |a_k|\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - (-a_k)), \text{ при } a_k \leq 0 \\ \frac{1}{2}(a_k - a_k), \text{ при } a_k > 0 \end{cases} = a_k^-$, значит $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ сходится.

Достаточность: пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ сходятся. По теореме о свойствах линейности сходящихся рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^+ - a_k^-\right)$ – также сходится.

Далее, $a_k^+ - a_k^- = \begin{cases} a_k - 0, \text{ при } a_k \geq 0 \\ 0 - a_k, \text{ при } a_k < 0 \end{cases} = |a_k|$, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, значит, по определению, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно.

Теорема доказана.

Теорема (о перестановке слагаемых абсолютно сходящегося ряда): если ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка слагаемых.

Доказательство: пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, тогда по предыдущей теореме ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ сходятся, причем очевидно, что $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что при перестановке членов каждого из рядов в правой части последнего равенства, их суммы не изменятся. Докажем это для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ доказательство аналогичное.

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$ – ряд, полученный из $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ перестановкой членов. Докажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$, для чего достаточно проверить неравенства $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \ge \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$.

Для проверки неравенств обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k^+$ и $\widetilde{S}_m = \sum_{k=1}^{m} a_k^+$.

Далее, для наглядности, рассмотрим иллюстрацию для конечного числа слагаемых:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & m & & & \\
a_1^+ & a_2^+ & a_3^+ & a_4^+ & a_5^+ \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
b_2^+ & b_5^+ & b_1^+ & b_3^+ & b_4^+ \\
 & n & & &
\end{array}
$$

Здесь n – это максимальный из номеров b_k^+, а m – соответствующий этому n номер a_k^+. Тогда очевидно, что $\widetilde{S}_m \le S_n \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$, откуда $\sum_{k=1}^{m} a_k^+ \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$.

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+$.

Теперь рассмотрим другой вариант:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & m \\ a_1^+ & a_2^+ & a_3^+ & a_4^+ & a_5^+ \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ b_2^+ & b_5^+ & b_1^+ & b_3^+ & b_4^+ \\ & & & & n \end{array}$$

Здесь m – это максимальный из номеров a_k^+, а n – соответствующий этому m номер b_k^+. Тогда очевидно, что $S_n \le \widetilde{S}_m \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, откуда $\sum_{k=1}^{n} b_k^+ \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$.

Теорема доказана.

Теорема (о рядах из положительных и отрицательных слагаемых условно сходящегося ряда): если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходятся.

Доказательство: пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Предположим противное, т.е. возможны три случая:

1. ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ оба сходятся;
2. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходится;

3. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ сходится.

В случае 1. по теореме о рядах из положительных и отрицательных слагаемых абсолютно сходящегося ряда получаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, что противоречит его условной сходимости.

Случаи 2. и 3. рассматриваются аналогично друг другу, поэтому рассмотрим только случай 2.

Пусть $s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} a_k^+$, $s_n^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^-$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, тогда ясно, что $s_n = s_n^+ + s_n^-$.

Т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ сходится, то $s_n^+ \underset{n\to\infty}{\to} const$ по определению сходимости ряда.

Т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходится, то $s_n^- \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ по определению расходимости ряда.

Таким образом, получаем, что $s_n \underset{n\to\infty}{\to} const - \infty = -\infty$, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, что противоречит тому, что он сходится условно и значит его частичные суммы $s_n \underset{n\to\infty}{\to} const$.

Таким образом, все три случая невозможны, значит предположение неверно.

Теорема доказана.

Теорема Римана (о перестановке слагаемых условно сходящегося ряда): если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то $\forall A \in \mathbb{R}$ слагаемые ряда можно переставить таким образом, чтобы сумма нового ряда стала равной числу A.

Замечание: тем самым сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка слагаемых, в отличие от абсолютно сходящегося ряда.

Доказательство: алгоритм перестановки будет состоять в следующем:

1) в качестве первого слагаемого нового ряда возьмем первое слагаемое исходного ряда, т.е. $b_1 = a_1$;

2) если $b_1 \geq A$, то в качестве b_2 возьмем ближайшее отрицательное слагаемое исходного ряда; если же $b_1 < A$, то в качестве b_2 возьмем ближайшее положительное слагаемое исходного ряда;

3) если $b_1 + b_2 \geq A$, то в качестве b_3 возьмем очередное ближайшее отрицательное слагаемое исходного ряда; если же $b_1 + b_2 < A$, то в качестве b_3 возьмем очередное ближайшее положительное слагаемое исходного ряда;

4) и т.д.

Надо доказать, что:

– во-первых, этот алгоритм приведет к перестановке слагаемых;

– во-вторых, сумма нового ряда будет равна A.

А) Предположим, что алгоритм не приведет к перестановке слагаемых, т.е. либо, начиная с некоторого номера, мы будем брать только положительные слагаемые, и тогда оставшиеся отрицательные слагаемые в новый ряд не войдут, либо наоборот.

Если мы берем все время только положительные слагаемые, значит, частичные суммы нового ряда все время остаются меньше A, т.е. частичные суммы ряда из положительных слагаемых ограничены сверху. По условию ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, значит, по предыдущей теореме ряд из положительных слагаемых расходится, и значит, его частичные суммы стремятся к $+\infty$ и не могут быть ограничены сверху в силу необходимого условия сходимости последовательности. Противоречие.

Случай “наоборот” рассматривается аналогично. Итак, алгоритм дал перестановку членов ряда.

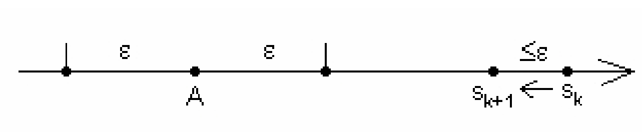
Б) Покажем, что сумма нового ряда действительно равна A, т.е. что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$, т.е. что $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n>N$ $|s_n-A|<\varepsilon$, т.е. что $s_n\in(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Для этого нужно показать, что:

– во-первых, какая-то частичная сумма s_n в эту ε-окрестность попадет;

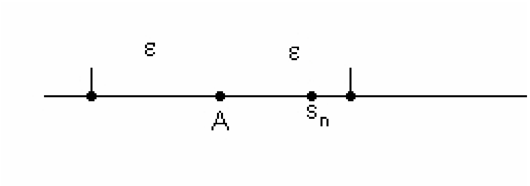
– во-вторых, все остальные частичные суммы, следующие за этой s_n, из данной ε-окрестности уже не выйдут.

Т.к. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то по необходимому условию сходимости ряда его слагаемые стремятся к нулю, т.е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists K\in\mathbb{N}$: $\forall k>K$ $|a_k|<\varepsilon$.



По алгоритму s_k сдвигается в направлении точки A на величину $|a_k|<\varepsilon$. Длина окрестности точки A равна 2ε и, значит, перескочить через нее частичные суммы не смогут. Оставаться же все время правее (левее) этой окрестности они тоже не могут, т.к. при добавлении отрицательных (положительных) слагаемых s_k движутся влево (вправо).

Итак, найдется номер $N\in\mathbb{N}$, такой, что для $n>N$ s_n попадет в нашу окрестность. Осталось показать, что все остальные s_n из этой окрестности уже не выйдут.



Действительно, если s_n правее точки A, то s_{n+1} не может оказаться правее правого конца окрестности, т.к. следующее добавленное слагаемое отрицательно, и не может оказаться левее левого конца окрестности, т.к. модуль добавленного слагаемого меньше ε. Значит, следующая частичная сумма также лежит в нашей окрестности.

Случай, когда s_n левее точки A аналогичен.

Итак, все остальные частичные суммы за пределы нужной окрестности не выйдут.

Теорема доказана.

РАЗДЕЛ 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Сходимость числового ряда, его сумма, частичные суммы

Пример 2.1.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$

Подсчитаем частичную сумму S_n:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(3n-2)}-\frac{1}{(3n+1)}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(3n+1)}\right).$$

По определению суммы ряда $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{(3n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

Пример 2.1.2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right).$$

Подсчитаем частичную сумму S_n:

$$S_n=\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}.$$

Пользуясь определением суммы ряда и раскрывая неопределенность вида $(\infty-\infty)$, при вычислении предела, получим:

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{2}.$$

Пример 2.1.3. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{49k^2+7k-12}.$$

Рассмотрим общий член этого ряда отдельно:

$$a_k=\frac{1}{49k^2+7k-12}=\frac{1}{(7k+4)(7k-3)}=\frac{7}{7(7k+4)(7k-3)}=\frac{4+3+7k-7k}{7(7k+4)(7k-3)}=$$

$$=\frac{1}{7}\frac{(7k+4)-(7k-3)}{(7k+4)(7k-3)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7k-3}-\frac{1}{7k+4}\right).$$

Частичная сумма примет вид

$$S_n=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{7n-3}-\frac{1}{7n+4}\right).$$

Сократив слагаемые с противоположными знаками, получим $S_n=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7n+4}\right)$. Отсюда $S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7n+4}\right)=\frac{1}{28}$.

Пример 2.1.4. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Преобразуем общий член ряда

$$a_k=\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\ln\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}=\ln\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k-1}{k}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)+\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)=\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)-\ln\left(\frac{k}{k+1}\right).$$

Пользуясь свойством логарифмов, сосчитаем частичную сумму этого ряда

$$S_n = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{3}{4} + ... + \ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1} =$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{n}{n+1} = \ln\frac{n+1}{2n}.$$

Зная частичную сумму, можем вычислить общую сумму ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln\frac{1}{2}.$$

Пример 2.1.5. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^k}\cos\frac{3}{2^k}.$$

Преобразуем общий член ряда

$$a_k = \sin\frac{1}{2^k}\cos\frac{3}{2^k} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2^k} + \frac{3}{2^k}\right) + \sin\left(\frac{1}{2^k} - \frac{3}{2^k}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{4}{2^k} - \sin\frac{2}{2^k}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2^{k-2}} - \sin\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Используем полученное представление при вычислении частичной суммы:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\sin 2 - \sin 1 + \sin 1 - \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2} + ... + \sin\frac{1}{2^{n-2}} - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

После сокращений получим, что $S_n = \frac{1}{2}\left(\sin 2 - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\sin 2 - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\sin 2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить общие суммы следующих рядов

1) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

2) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}$

3) $\frac{1}{34} + \frac{1}{45} + \frac{1}{56} + ... + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + ...$

4) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k} + \frac{(-1)^k}{2\cdot 3^k}\right)$

2.2. Критерий Коши сходимости ряда

Пример 2.2.1. Используя критерий Коши для рядов, покажем, что гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится.

Воспользуемся отрицанием условия Коши. Возьмем $\forall N \in \mathbb{N}$, тогда $\exists n > N, \quad \exists m = 2n$, такие, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} a_k\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right| > \frac{1}{2n}\cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon .$$

Итак, указали такое $\varepsilon = \frac{1}{2}$ при котором $\forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists m \geq n > N$ такие, что выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| > \varepsilon$.

Пример 2.2.2. Пользуясь критерием Коши доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{2^k}.$$

Оценим выражение $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\cos kx}{2^k}\right| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos mx}{2^m}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} = \varepsilon .$$

Следовательно, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать натуральное число $N = \left[-\log_2 \varepsilon\right] + 1$ такое, что $\forall m \geq n > N$ выполняется условие $\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\cos kx}{2^k}\right| < \varepsilon$**.**

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos\alpha^k}{k^2}$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+1}$ 3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

2.3. Необходимое условие сходимости ряда

Пример 2.3.1. Проверить необходимое условие сходимости для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sin\dfrac{1}{k} = 0$, то необходимое условие сходимости ряда выполнено.

Пример 2.3.2. Проверить необходимое условие сходимости для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \ldots$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{3k-1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$, то не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит ряд расходится.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать расходимость следующих рядов, пользуясь необходимым условием сходимости

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\sin\dfrac{1}{k}$ 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{\ln k}}$

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^{k(k^2+1)}$ 4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k^2+2)\ln\dfrac{k^2+1}{k^2}$

2.4. Простейшие сходящиеся ряды и их свойства

Пример 2.4.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{75}+\frac{2}{125}+\ldots+\frac{2}{5^k}+\ldots$$

Очевидно, что это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Частичная сумма ряда будет суммой n первых членов геометрической прогрессии.

Используя формулу $S_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, получим

$$S_n=\frac{\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right).$$

Сумму ряда найдем по определению: $S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{5^n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Пример 2.4.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots$$

Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1=\dfrac{2}{3}$, $q=\dfrac{1}{2}<1$. Следовательно, он сходится,

$$S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать на сходимость следующие ряды

1) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{81}+\ldots+\dfrac{2}{3^k}+\ldots$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{1}{243} + \ldots$

2.5. Критерий Вейерштрасса для рядов с неотрицательными членами

Пример 2.5.1. Доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 5k}{(k+1)(k+2)}$ пользуясь критерием Вейерштрасса.

Применение критерия оправдано, поскольку это ряд с неотрицательными членами.

$$a_k = \frac{\sin^2 5k}{(k+1)(k+2)} \le \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+2-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 5k}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}.$$

Показали, что последовательность частичных сумм данного ряда ограничена сверху, значит ряд сходится.

Пример 2.5.2. Доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot 2^k + 5}$, установив ограниченность сверху последовательности его частичных сумм.

$$a_k = \frac{k+1}{k \cdot 2^k + 5} \le \frac{k+1}{k \cdot 2^k} \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{k \cdot 2^k} \le \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k \cdot 2^k + 5} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Частичные суммы ограничены сверху, следовательно, ряд сходится.

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать сходимость ряда по критерию Вейерштрасса

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\ln k}{k}\right)q^k, \quad 0<q<1$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 2^k+3}{k\cdot 5^k+1}$

2.6. Первый и второй признаки сравнения

Пример 2.6.1. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{arctg\,k}{k^2+1}$$

Ограничим общий член ряда сверху $\frac{arctg\,k}{k^2+1}\le\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{k^2+1}\le\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{k^2}$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ представляет собой обобщенный гармонический ряд, который сходится при $p=2>1$. Таким образом, применяя первый признак сравнения, получаем, что исходный ряд сходится.

Пример 2.6.2. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\ldots$$

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, используя второй признак сравнения: $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{3k-1}=\frac{1}{3}>0$. В силу второй теоремы сравнения исходный ряд расходится (т.к. расходится гармонический ряд).

Пример 2.6.3. Сходится ли ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5+3(-1)^{k+1}}{2^k}?$$

$$a_k=\frac{5+3(-1)^{k+1}}{2^k}\le\frac{5+3}{2^k}=\frac{8}{2^k}=\frac{1}{2^{k-3}}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-3}}$ сходится, т.к. является бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Следовательно, исходный ряд также сходится.

Пример 2.6.4. Проверим сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+k}} = \frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}.$$

Поскольку обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ при $p = \frac{1}{2} < 1$ является расходящимся, то в силу первого признака сравнения исходный ряд также расходится.

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать сходимость следующих рядов

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 3k}{k\sqrt{k}}$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5(\sqrt{2} + \sin\sqrt{k})}{2^k + k}$

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3(2-\cos 2k)}$

2.7. Признаки Коши и Даламбера. Другие достаточные признаки сходимости

Пример 2.7.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$.

Здесь $a_k = \frac{2^k}{k^{10}}$, $a_{k+1} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^{10}}$. По признаку Даламбера ряд расходится, поскольку $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1} \cdot k^{10}}{(k+1)^{10} \cdot 2^k} = 2\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{10} = 2 > 1$.

Пример 2.7.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{3^k}}$.

По признаку Даламбера ряд сходится, так как

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)\cdot\sqrt{3^k}}{\sqrt{3^{k+1}}\cdot k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{\frac{k}{2}}\cdot(k+1)}{3^{\frac{k+1}{2}}\cdot k}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1.$$

Пример 2.7.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$.

Общий член ряда представляет собой степенно-показательную функцию, поэтому для исследования сходимости ряда удобно применить признак Коши. Так как $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{k}{2k+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\frac{k}{2k+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$, то ряд сходится.

Пример 2.7.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

Аналогично предыдущему примеру вычислим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\sup_{n\geq k}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1.$$

В соответствии с признаком Коши ряд расходится.

Пример 2.7.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k+\frac{1}{k}}}{\left(k+\frac{1}{k}\right)^k}$.

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{k^{k+\frac{1}{k}}}{\left(k+\frac{1}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+\frac{1}{k}}\right)^k \cdot k^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^{\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^k} = 1 \neq 0,$$

то ряд расходится в силу необходимого условия сходимости.

Дадим здесь без доказательства еще два достаточных признака сходимости для рядов с положительными членами.

Признак Раабе: если для членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует предел $\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right) = p$, то этот ряд сходится при $p>1$ и $p=+\infty$ и расходится при $p<1$.

Признак Гаусса: Пусть для членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ справедливо представление $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^{1+\varepsilon}}; \quad \lambda, \mu = const.$

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует $|\theta_k| < C$, то при $\lambda > 1$ ряд сходится; при $\lambda < 1$ ряд расходится; при $\lambda = 1$ и при $\mu > 1$ ряд сходится; при $\lambda = 1$ и при $\mu \le 1$ ряд расходится.

Пример 2.7.6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!}{(2k)!}\frac{1}{2k+1}$.

Используем признак Раабе, т.к. признак Даламбера не позволяет исследовать сходимость данного ряда, поскольку $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$

Найдём p:

$$p=\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{(k+1)(2k+3)}{k(2k+1)}-1\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{4k+3}{2k+1}=2$$

Т.к. $p>1$, то ряд сходится.

Пример 2.7.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{n!}$.

Используем признак Гаусса.

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{k+1}{k+\alpha}=\frac{k+\alpha+1-\alpha}{k+\alpha}=1+\frac{1-\alpha}{k+\alpha}=1+\frac{1-\alpha}{k}+\frac{\theta_k}{k^{1+\varepsilon}},$$

где $\frac{\theta_k}{k^{1+\varepsilon}}=\frac{\alpha(\alpha-1)}{k(k+\alpha)}$.

Из полученного соотношения видно, что $\lambda=1$, значит нужно посмотреть чему равна константа μ.

Видим, что если $\mu=1-\alpha>1$ при $\alpha<0$, то исходный ряд сходится. Если же $\mu=1-\alpha<1$ при $\alpha>0$, то исходный ряд расходится.

При $\alpha=0$ ряд состоит только из нулевых слагаемых, а, следовательно, сходится.

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать на сходимость следующие числовые ряды

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k!}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{10^k+k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{100^k-1}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^k}{2k+5}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{(2^k+1)^2}$
8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{5^k+1}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+1}{5^k+1}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k^2+2k+1}{5k^2+2k+1}\right)^k$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^k\cdot k^5$

12. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{2k-1}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10k}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^{k-1}}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{5^{k+1}}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+1}$

2.8. Ряды с произвольными членами

Пример 2.8.1. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^k}$.

Ряд из абсолютных величин $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, он сходится, а исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2.8.2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-2}{3k-1}$.

Ряд расходится, так как $\lim_{k\to\infty}(-1)^k\frac{3k-2}{3k-1}=1\neq 0$ не существует, т.е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Пример 2.8.3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k+1)}{k^2+k+1}$.

Ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+k+1}$, можно сравнить с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$.

В самом деле, т.к. $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k^2+k+1}:\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+k}{k^2+k+1}=1>0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+k+1}$ расходится, а исходный ряд абсолютно не сходится. Исследуем его на условную сходимость.

По признаку Лейбница ряд сходится условно, т.к.:

во-первых, ряд знакочередующийся;

во-вторых, $\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k^2+k+1}=0$;

в-третьих, $\frac{k+1}{k^2+k+1}>\frac{(k+1)+1}{(k+1)^2+(k+1)+1}$ для любого k, поскольку

$$\frac{k+1}{k^2+k+1}-\frac{k+2}{(k+1)^2+(k+1)+1}=\frac{k+1}{k^2+k+1}-\frac{k+2}{k^2+3k+3}=$$

$$=\frac{k^2+3k+1}{(k^2+k+1)(k^2+3k+3)}>0.$$

Пример 2.8.4. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{6k-5}{(10)^k}$.

Ряд из абсолютных величин $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k-5}{(10)^k}$ сходится по признаку Даламбера, т.к. $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(6k+1)10^k}{10^{k+1}(6k-5)}=\frac{1}{10}<1$. Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 2.8.5. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^4}$.

Ряд сходится абсолютно, так как сходится обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ ($p=4>1$).

Пример 2.8.6. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\ln(k+1)}$.

По признаку Лейбница данный ряд сходится, так как $\frac{1}{\ln(k+1)}>\frac{1}{\ln(k+2)}$ и $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\ln(k+1)}=0$. Но ряд из абсолютных величин $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(k+1)}$ расходится по первой теореме сравнения, ибо $\frac{1}{\ln(k+1)}>\frac{1}{k+1}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ является расходящимся, что нетрудно показать путём сравнения его с гармоническим рядом.

Итак, данный ряд сходится условно.

Пример 2.8.7. $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$.

Представим общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}=(-1)^k\frac{\sqrt{k}-(-1)^k}{k-1}=(-1)^k\frac{\sqrt{k}}{k-1}-\frac{1}{k-1}.$$

Т.к. ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k-1}$ по признаку Лейбница сходится, а ряд $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}$ расходится, что нетрудно показать путём сравнения его с гармоническим рядом, то исходный ряд расходится.

Пример 2.8.8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\cdot\sin k^2}{k}$.

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\cdot\sin k^2\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos k(k-1)-\cos k(k+1)\right)\right|=\frac{1}{2}\left|1-\cos n(n+1)\right|\le 1$$

и $\dfrac{1}{k}\to 0$ при $k\to\infty$, то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится.

Пример 2.8.9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi k}{4}}{k^p}$.

Если $p\le 0$, то ряд расходится ввиду невыполнения необходимого условия сходимости ряда.

Если $p>0$, то ряд сходится по признаку Дирихле, т.к.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{4}\right|=\left|\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{4}+...+\sin\frac{\pi n}{4}\right)\sin\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{(1+2n)\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

а последовательность $\dfrac{1}{k^p}$ монотонно убывает при $k\to\infty$ и $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^p}=0$.

Для исследования характера сходимости воспользуемся вначале признаком сравнения. Так как $\dfrac{\left|\sin\frac{\pi k}{4}\right|}{k^p}\le\dfrac{1}{k^p}$, то ряд сходится абсолютно при $p>1$.

Характер сходимости ряда на промежутке $0<p\le 1$ определяет неравенство $\dfrac{\left|\sin\frac{\pi k}{4}\right|}{k^p}\ge\dfrac{\sin^2\frac{\pi k}{4}}{k^p}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi k}{2}}{2k^p}=\dfrac{1}{2k^p}-\dfrac{\cos\frac{\pi k}{2}}{2k^p}$.

Ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi k}{2}}{2k^p}$ сходится по признаку Дирихле, как и исходный ряд, а ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^p}$ расходится при $p\le 1$.

Поэтому исходный ряд для $0 < p \le 1$ сходится условно. Итак, данный ряд сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $0 < p \le 1$.

Пример 2.8.10. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{2^k}$.

Т.к. $\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ 1, & k = 1+4n \\ -1, & k = 3+4n \end{cases}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi k}{2}}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4^2} - \ldots$ представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = -\frac{1}{4}$. Следовательно, ряд сходится и сумма $S = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$.

Пример 2.8.11. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^k}{3^k}$.

Очевидно, что $\frac{2^k + (-1)^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{(-1)^k}{3^k}$, а каждый из полученных рядов $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}$ представляет собой сумму членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий Сумма ряда $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3$, а $S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} = \frac{3}{4}$. Следовательно, $S = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать на абсолютную и условную сходимость

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{2^k}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+100}{3k+1}\right)^k$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sqrt{k}}{k+100}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2^k}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{k}}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}k^{100}}{2^k}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{k}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k^2}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\cdot 2^k}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{k}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k^3}{2^k}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман – СПб.: Профессия, 2002.*
2. Виленкин, Н.Я. Математический анализ / Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбург. – М.: Просвещение, 1969.
3. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: МГУ, 1988.
4. Власова, Е.А. Ряды / Е.А. Власова – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.*
5. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – СПб.: МИФРИЛ, 1995.*
6. Зорич, В.А. Математический анализ. Т.1. / В.А. Зорич. – М.: Наука, 1981.
7. Кудрявцев, Л.Д. Математический анализ. Т.1. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1981.*
8. Свиридюк, Г.А., Федоров В.Е. Математический анализ. Часть 1: Учеб. пособие / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров. – Челябинск: Челяб. гос. Университет, 1999.*
9. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969.*

Литература, отмеченная *, имеется в читальном зале библиотеки ТФ ЧелГУ.