Федеральное агентство по образованию
Троицкий филиал государственного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА:
АДАПТИВНО-МОДУЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

Методические рекомендации
для самостоятельной работы студентов

Троицк 2009

Утверждено на заседании
кафедры математики и информатики
Протокол №4.от 20.12.2009

Одобрено учебно – методической комиссией
Троицкого филиала ГОУ ВПО «ЧелГУ»

Методические рекомендации содержат примеры решения типовых задач; теоретический материал, необходимый для их решения; задания для самостоятельной работы студентов; ответы и указания к решению.

Предназначены для самостоятельной работы студентов специальности 010501 «Прикладная математика и информатика»

Составители: С.В. Нужнова, канд. пед. наук, доцент кафедры математики и информатики Троицкого филиала ГОУ ВПО «ЧелГУ»
М.Г. Булатова, ст. преподаватель кафедры математики и информатики Троицкого филиала ГОУ ВПО «ЧелГУ»

Рецензент: Н.Х. Валеева, канд. пед. наук, преподаватель ФГОУ СПО «ТАТУК ГА».

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных разделов математики студентами включает в себя овладение значительным числом научных понятий.

Усвоение понятия связано с выделением его составных частей и анализом связей между ними. Одним из важнейших условий усвоения понятия является обеспечение анализа содержания понятия в процессе выполнения упражнений. Получается, что знание понятия создаёт условия для решения задач, а решение достаточного количества задач эти знания углубляют, конкретизируют и закрепляет.

Каждому научному понятию соответствует конкретный алгоритм решения стандартной задачи. При самостоятельном решении 5-6 стандартных задач этот алгоритм, как правило, усваивается.

Однако освоение основных разделов математики не ограничивается решением стандартных задач. Для решения сложных, развивающих задач, построенных на основе использования нескольких понятий сразу, необходимо уметь применять комбинации стандартных алгоритмов.

Говорят, что сильные математики обладают математической интуицией. Что это такое – математическая интуиция? По - видимому, это умение вести поиск нужной комбинации стандартных алгоритмов решения задач, плюс умение предвидеть результат. Возникнуть сами собой эти умения не могут; следовательно, математическая интуиция приобретается в процессе решения задач – задач стандартных, задач развивающих, задач с проблемными ситуациями, задач, условие которых отражает производственные (профессиональные) ситуации.

Педагогическая наука и практика преподавания математики показывает, что для приобретения глубоких и прочных знаний математических понятий и формирования умений и навыков, студентам недостаточно прорешать некоторое (даже довольно большое) число задач, необходима система упражнений, отвечающая целям и задачам обучения, содержащая оптимальное число стандартных и развивающих задач.

В данных методических рекомендациях предложена система задач, способствующая процессу усвоения знаний раздела аналитической геометрии – кривые второго порядка. Нами использовалась *адаптивно-модульная* технология, соединяющая в себе положения адаптивного обучения (поэтапное формирование понятий, опора на зону ближайшего развития, индивидуальная траектория освоения материала и т.д.) и модульного построения материала. Как показали исследования, использование адаптивно-модульной технологии при изучении различных разделов математики позволяет значительно повысить эффективность самостоятельного освоения учебного материала.

Согласно данной технологии весь материал разбит на два модуля, содержащие более мелкие логически завершенные порции материала (подмодули). Изучив содержание и прорешав задачи одного подмодуля, можно переходить к следующему. В каждом подмодуле имеются задачи разной степени сложности, что обеспечивает ваиативность и индивидуализацию процесса обучения. В конце каждого модуля предусмотрено машинное тестирование (самотестирование) в рамках тестовой оболочки «Айрен».

МОДУЛЬ 1. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ КАНОНИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

1.1. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух постоянных точек – *фокусов* эллипса – есть величина постоянная, равная $2a$, большая, чем расстояние между фокусами $2c$.

Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы эллипса располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение данного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

где $b^2=a^2-c^2$; при $a>c$

При таком выборе системы координат оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии (рис.1.1.1).

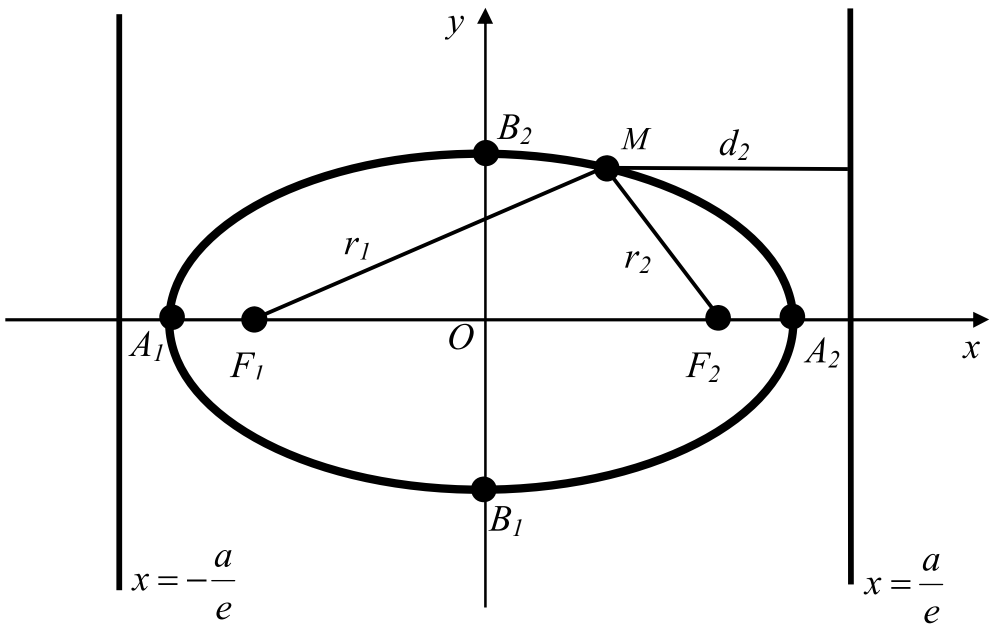

Рисунок - 1.1.1

Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его *вершинами*. На рис.1.1.1 вершины эллипса точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2\,(0;b)$

Отрезки, заключенные между вершинами, называются *осями* эллипса: (на рис.1.1.1) $A_1A_2 = 2a$ – большая (фокальная) ось; $B_1B_2 = 2b$ – малая ось. Отрезок $OA_2 = a$ называют большей полуосью эллипса, отрезок $OB_2 = b$ – малой полуосью.

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы, $F_1F_2=2c$ – расстояние между фокусами

По определению эллипса $F_1M+F_2M=2a>2c$

Эксцентриситетом (e) эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большей оси, т.е.

$$e = \frac{c}{a}\,, \quad e<1 \tag{2}$$

Расстояния от любой точки $M(x,y)$ эллипса до фокусов называются её *фокальными радиусами* r_1 и r_2:

$$r_1=a+ex,\ \ r_2=a-ex \tag{3}$$

Директрисами эллипса называются две прямые, перпендикулярные оси эллипса, на которой расположены его фокусы, и отстоящие от центра эллипса на расстоянии, равном a/e, где a – большая полуось, e – эксцентриситет эллипса.

Уравнения директрис

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x = \frac{a}{e} \tag{4}$$

Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса (r_1 или r_2) к расстоянию той же точки до соответствующей директрисы (d_1 или d_2) равно эксцентриситету (e):

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{d_2} = e \tag{5}$$

Эллипс может иметь со всякой прямой две точки пересечения (действительные, мнимые или сливающиеся). Если прямая встречает эллипс в двух слившихся точках, то она называется *касательной* к эллипсу.

Уравнение касательной к эллипсу (1) в точке $N(x_1 y_1)$:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Примеры решения задач

Пример 1: Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 2 и 5;
2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;
3) его малая ось равна 6, а эксцентриситет $e = \sqrt{2}/2$.

Решение:

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где a – большая полуось, b – малая полуось.

1) По условию задачи $a=5$, $b=2$, тогда искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

2) По условию задачи $2a=10$, $2c=8$, отсюда $a=5$, $c=4$. Найдём значение b из соотношения

$$b^2=a^2-c^2$$

получим

$$b^2 = 25-16=9$$

тогда искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

3) Чтобы найти значение *a,* из соотношения

$$b^2=a^2-c^2$$

выразим *c* и подставим в формулу для вычисления эксцентриситета эллипса:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

По условию задачи $2b=6$, $e=\sqrt{2}/2$. Подставив, найдём значение *a*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2-9}}{a}$$

Получаем $a^2=18$. Искомое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$$

Пример 2: Дан эллипс $9x^2+5y^2=45$. Найти:

1) полуоси *a* и *b*;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения директрис.

Сделать чертёж.

Решение: 1) Приведём данное уравнение эллипса к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Для этого разделим обе части на 45. Получим

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

Отсюда определяем полуоси эллипса: $a=\sqrt{5}, \quad b=3$.

2) Так как большая ось совпадает с осью Oy, значит и фокусы расположены на оси Oy и будут иметь координаты

$$F_1(0;-c) \text{ и } F_2(0;c)$$

где c найдём из соотношения

$$a^2 = b^2 - c^2$$

Значит

$$c^2 = 9\text{-}5\text{=}4$$

Тогда координаты фокусов

$$F_1(0;-2) \text{ и } F_2(0;2)$$

3) Эксцентриситет в данном случае ($b>a$)считаем по формуле

$$e = \frac{c}{b}$$

При $c = 2$ и $b = 3$, находим эксцентриситет данного эллипса

$$e = \frac{2}{3}$$

4) Директрисы данного эллипса будут определятся уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{e}$$

При $b = 3$, $e = \frac{2}{3}$ уравнения директрис будут иметь вид

$$y = \frac{9}{2} \text{ и } y = -\frac{9}{2}$$

Сделаем чертеж (рис.1.1.2)

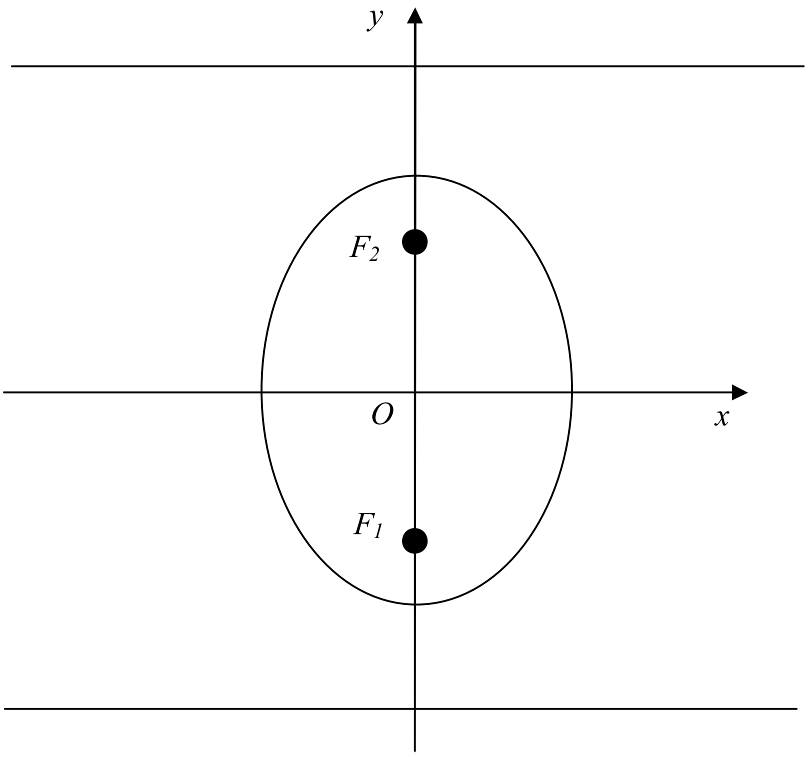

Рис.1.1.2

Пример 3: Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точки $A(2\sqrt{3};\sqrt{6})$ и $B(6;0)$. Написать его уравнение.

Решение: По условию эллипс проходит через точки A и B, это означает, что каждая из этих точек должна удовлетворять уравнению эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Подставив вместо x и y один раз координаты точки A, другой раз координаты точки B, получим

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{6})^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{6^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1.$$

Решая совместно эти два уравнения с неизвестными a и b, находим $a^2=36$ и $b^2=9$.

Искомое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

Пример 4: Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, проведённых из точки $A(10;4)$.

Решение: Уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

имеет вид

$$\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}=1$$

где $N(x_1y_1)$ – точка касания.

Уравнение касательной к данному эллипсу будет иметь вид

$$\frac{x\cdot x_1}{25}+\frac{y\cdot y_1}{16}=1$$

Так как касательная проходит через точку $A(10;4)$, то её координаты должны удовлетворять тому уравнению, подставляя в это уравнение вместо x и y координаты точки A, получим

$$\frac{10x_1}{25}+\frac{4y_1}{16}=1, \text{ или } \frac{2x_1}{5}+\frac{y_1}{4}=1$$

Но точка прикосновения (x_1y_1) лежит на данном эллипсе, поэтому

$$\frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{16}=1$$

Решая систему двух полученных уравнений, находим два решения: $(0;4)$ и $(4; -\frac{12}{5})$.

Искомых касательных две; их уравнения получим, подставляя в уравнение

$$\frac{x \cdot x_1}{25} + \frac{y \cdot y_1}{16} = 1$$

вместо x_1 и y_1 один раз 0 и 4, другой раз 4 и $-\frac{12}{5}$:

$$0 + \frac{4y}{16} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{4x}{25} - \frac{12/5\ y}{16} = 1,$$

упрощая, получим уравнения двух касательных:

$$y = 4, \ 16x - 15y - 100 = 0$$

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

1) полуоси;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения директрис.

1.2. Дан эллипс $16x^2 + y^2 = 16$. Найти:

1) полуоси a и b;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения директрис.

1.3. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) полуоси его соответственно равны 4 и 2;
2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;
3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет e=0,8;
4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $e = \sqrt{2}/2$;

5) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.
6) расстояние одного из фокусов эллипса до концов его большей оси соответственно равны 7 и 1.

1.4. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
1) его полуоси равны соответственно 7 и 2;
2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами равно 8;
3) расстояние между его фокусами равно 24 и эксцентриситет равен 12/13;
4) его малая ось равна 16, а эксцентриситет равен 3/5;
5) расстояние между его фокусами равно 6 и расстояние между директрисами равно 50/3;
6) расстояние между его директрисами равно 32/3 и эксцентриситет равен 3/4.

1.5. Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написать уравнения его директрис.

1.6. Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

1.7. На эллипсе $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ найти точки, абсцисса которых равна -3.

1.8. Эллипс проходит через точки M($\sqrt{3}$;-2) и N(-2$\sqrt{3}$;1). Составить уравнение эллипса, приняв его оси за оси координат.

1.9. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат если даны:
1) точка $M(-2\sqrt{5};2)$ эллипса и его малая полуось равная 3;
2) точка $M(2;-2)$ эллипса и его большая полуось, равная 4;

3) точка $M(\sqrt{15};-1)$ эллипса и расстояние между его фокусами равно 8;

4) точка $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ эллипса и его эксцентриситет $e= 2/3$;

5) точка $M(8;12)$ эллипса и расстояние от нее до левого фокуса равно 20;

6) точка $M(-\sqrt{5};2)$ эллипса и расстояние между его директрисами равно 10.

1.10. Дана точка $M\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ на эллипсе $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M.

1.11. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.

1.12. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, расстояние которых до левого фокуса равно 2,5.

1.13. На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния от левого фокуса.

1.14. Эксцентриситет эллипса равен 2/3, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

1.15. Эксцентриситет эллипса равен 2/5, расстояние от точки M эллипса до директрисы фокальный равно 20. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

1.16. В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

1.17. Найти точки пересечения прямой $3x+10y-25=0$ и эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

1.18. Найти точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.

1.19. Найти точки пересечения прямой $3x-4y-40=0$ и эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

1.20. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+m$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

1.21. Эллипс проходит через точку $P(3;{}^{12}\!/_{5})$ и касается прямой $4x+5y=25$. Написать уравнение этого эллипса и найти точку, в которой он касается данной прямой.

1.22. Эллипс касается двух прямых: $x+y=5$ и $x-4y=10$. Найти уравнение этого эллипса.

1.23. Написать уравнение прямой, касающейся эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке (2;-3).

1.24. Составить уравнение касательных, проведённых из точки $A(-6;3)$ к эллипсу $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$.

Задачи повышенной сложности

1.25. В эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной большей оси. Найти координаты двух других вершин треугольника.

1.26. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

1.27. Найти уравнение той касательной эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, отношение расстояний от двух фокусов равно 9.

1.28. Найти общие касательные к следующим двум эллипсам: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ и $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

1.29. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведенные в концах одного и того же диаметра, параллельны. (Диаметром эллипса называется его хорда, проходящая через центр.)

1.2. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух постоянных точек – *фокусов* гиперболы – есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая, чем расстояние между фокусами $2c$.

Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение данной гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

где $b^2=c^2-a^2$; при $c>a$

При таком выборе системы координат оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – её центром симметрии (рис.1.2.1).

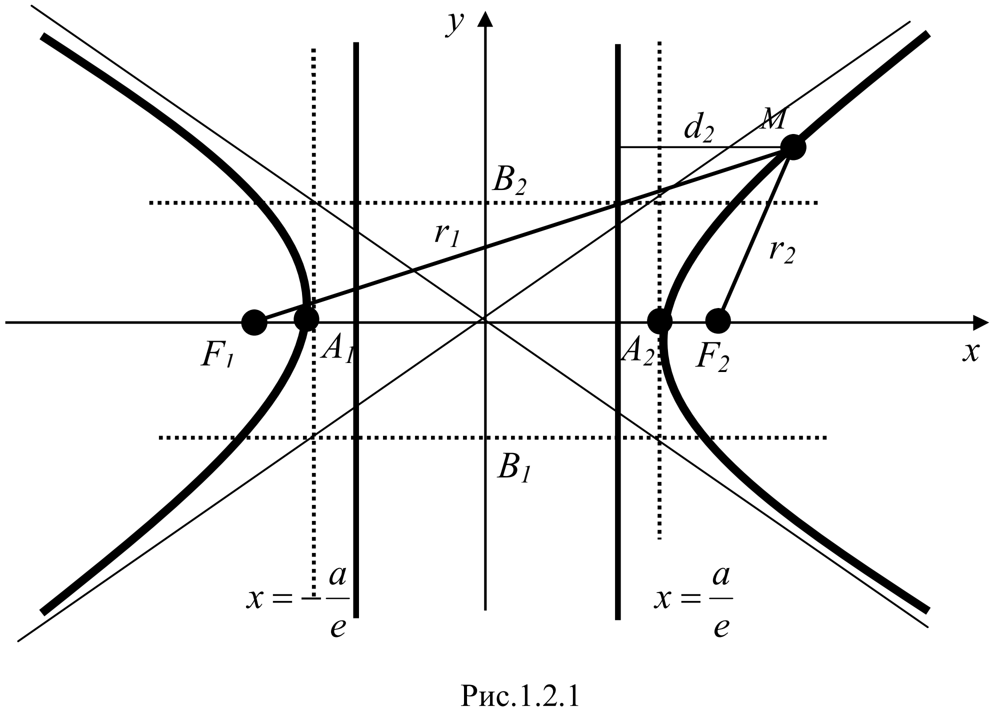

Рис.1.2.1

По определению гиперболы $|F_1M-F_2M|=2a$, $2a<2c$

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы.

Гипербола пересекает одну из своих осей. Точки пересечения называются *вершинами*. На рис.1.2.1 вершины гиперболы точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$

Отрезок, заключенный между вершинами, $A_1A_2=2a$, называется *действительной* (вещественной) *осью* гиперболы. Условно отрезок $B_1B_2=2b$ называют *мнимой осью* гиперболы. Отрезок $OA_2=a$ называют действительной полуосью, отрезок $OB_2=b$ – мнимой полуосью гиперболы.

Для гиперболы возможны три случая: $a>b$, $a=b$, $a<b$.

Если $a=b$, гипербола называется *равносторонней.*

Диагонали прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, расположенного симметрично относительно осей гиперболы и касающегося её в вершинах, являются *асимптотами* гиперболы; их уравнения

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x \qquad (8)$$

Если мнимая ось гиперболы имеет длину $2a$ и направлена по оси x, а действительная ось, длиной $2b$, совпадает с осью y, то уравнение такой гиперболы имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (9)$$

Гиперболы (7) и (9) называются *сопряженными гиперболами.*

Эксцентриситетом (e) гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси; для гиперболы (7)

$$e=\frac{c}{a}, \quad e>1 \qquad (10)$$

Гипербола (7) состоит из двух ветвей (правой и левой), простирающихся в бесконечность.

Расстояния от любой точки $M(x,y)$ гиперболы до фокусов называются её *фокальными радиусами* (r_1 и r_2). Для точек правой ветви фокальные радиусы вычисляются по формулам:

$$r_1=ex+a,\ r_2=ex-a \qquad (11)$$

фокальные радиусы точек левой ветви – по формулам:

$$r_1=-ex-a,\ r_2=-ex+a \tag{12}$$

Директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные к действительной оси и отстоящие от центра на расстояние a/e, где a – действительная полуось. Уравнения директрис:

$$x=\frac{a}{e}\ ,\ x=-\frac{a}{e} \tag{13}$$

Отношение расстояние любой точки гиперболы от фокуса к расстоянию той же точки от соответствующей директрисы равно эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r_1}{d_1}=e \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{d_2}=e \tag{14}$$

Из каждой точки плоскости можно провести две касательные к гиперболе; если точка взята на гиперболе, то обе касательные сливаются в одну; точки, из которых можно провести две действительные и разные касательные, составляют внешнюю область гиперболы; точки, из которых можно провести только мнимые касательные, составляют внутреннюю область гиперболы.

Уравнение касательной к гиперболе (7) в точке $N(x_1y_1)$:

$$\frac{x\cdot x_1}{a^2}-\frac{y\cdot y_1}{b^2}=1 \tag{15}$$

Примеры решения задач

*Пример 1:*Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Требуется:

1) вычислить координаты фокусов;
2) вычислить эксцентриситет;
3) написать уравнения асимптот и директрис;
4) написать уравнение сопряжённой гиперболы и вычислить её эксцентриситет; сделать чертёж.

Решение: 1) фокусы расположены на оси Ox и будут иметь координаты

$$F_1(-c;0) \text{ и } F_2(c;0)$$

где c найдём из соотношения

$$b^2 = c^2 - a^2$$

из уравнения гиперболы a^2 =9 и b^2=16. Значит

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Фокусы данной гиперболы имеют координаты

$$F_1(-5;0) \text{ и } F_2(5;0)$$

2) Эксцентриситет гиперболы считаем по формуле

$$e = \frac{c}{a}$$

При $c = 5$ и $a = 3$, находим эксцентриситет данного эллипса

$$e = \frac{5}{3}$$

3) Уравнения асимптот гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеют вид

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x$$

а уравнения директрис:

$$x = \frac{a}{e}, \; x = -\frac{a}{e}$$

Подставим сюда значения $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $e = \frac{5}{3}$.

Тогда уравнения асимптот

$$y = \frac{4}{3}x; \; y = -\frac{4}{3}x$$

уравнения директрис

$$x = \frac{3}{5/3} = \frac{9}{5} \quad \text{и} \quad x = -\frac{3}{5/3} = -\frac{9}{5}$$

4) Уравнение сопряжённой гиперболы к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где мнимая ось $2a$ направлена по оси x, а действительная ось, длиной $2b$, совпадает с осью y

Искомое уравнение сопряжённой гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

здесь действительная полуось b =4, значит эксцентриситет

$$e' = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$$

Сделаем чертёж (рис.1.2.2)

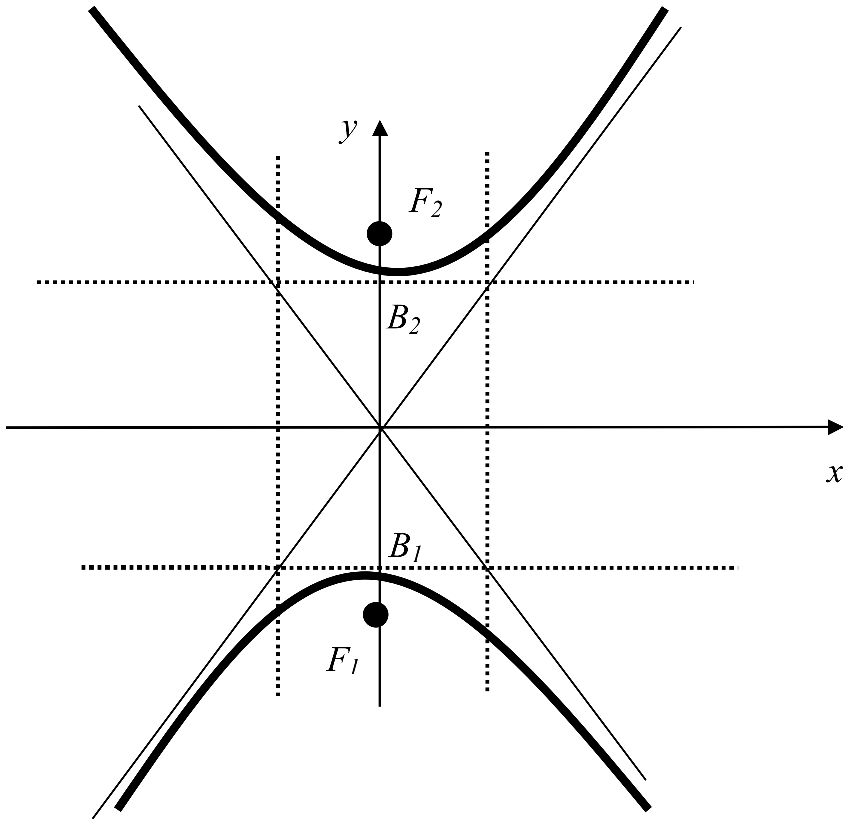

Рис.1.2.2

Пример 2: Убедившись, что точка $M(10;6\sqrt{2})$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$, определить фокальные радиусы точки М.

Решение: Точка лежит на гиперболе, значит, её координаты удовлетворяют уравнению этой гиперболы. Проверим, подставив координаты x и y точки M в данное уравнение гиперболы,

$$\frac{(10)^2}{25}-\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2}{24}=1 \text{ верно.}$$

Значит, точка M лежит на гиперболе.

Так как $x>0$ и $y>0$ точка M лежит на правой ветви гиперболы.

Для точек правой ветви фокальные радиусы вычисляются по формулам:

$$r_1=ex+a,\ r_2=ex-a$$

Из уравнения гиперболы a=5 и $b=\sqrt{24}$,

из соотношения

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Найдём значение c

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 24} = 7$$

тогда эксцентриситет

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{5}$$

Вычислим фокальные радиусы точки M

$$r_1 = \frac{7}{5} \cdot 10 + 5 = 19, \; r_2 = \frac{7}{5} \cdot 10 - 5 = 9$$

Задачи для самостоятельной работы

1.30. Дана гипербола $16x^2$-$9y^2$=144. Найти:

1) полуоси a и b;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения асимптот;
5) уравнения директрис.

1.31. Дана гипербола $16x^2$-$9y^2$= -144. Найти:

1) полуоси a и b;
2) фокусы;
3) эксцентриситет;
4) уравнения асимптот;
5) уравнения директрис.

1.32. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) её оси $2a$=10 и $2b$=8;
2) расстояние между фокусами $2c$=10 и ось $2b$=8;

3) расстояние между фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$;

4) ось $2a=16$ и эксцентриситет $e=\frac{5}{4}$;

5) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c=20$;

6) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ расстояние между фокусами $2c=26$;

7) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b=6$;

8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$;

9) уравнение асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

1.33. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами 10;
2) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояние между центром и фокусами пополам;
3) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку (9;-4);
4) гипербола проходит через две точки $P(-5;2)$ и $Q(2\sqrt{5};\sqrt{2})$.

1.34. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) расстояние между фокусами $2c$=10 и эксцентриситет $e=\frac{5}{3}$;

2) уравнения асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;

3) расстояние между директрисами равно $\frac{50}{7}$ и эксцентриситет $e=\frac{7}{5}$;

4) уравнение асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$.

1.35. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

1) точки M_1(6;-1) и M_2(-8;2 $\sqrt{2}$) гиперболы;

2) точка M_1(-5;3) гиперболы и эксцентриситет $e=\sqrt{2}$;

3) точка M_1(9/2;-1) гиперболы и уравнения асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$.

1.36. Составить уравнение гиперболы, зная фокусы F_1(10;0), F_2(-10;0) и одну из точек гиперболы $M(12;3\sqrt{5})$.

1.37. Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.

1.38. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $9x+2y-24=0$.

1.39. Убедившись, что точка M_1(-5;9/4) лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, определить фокальные радиусы точки M_1.

1.40. Эксцентриситет гиперболы e=2, фокальный радиус её точки M, проведённый из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

1.41. Эксцентриситет гиперболы e=3, расстояние от точки M до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

1.42. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние которых до правого фокуса равно 4,5.

1.43. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

1.44. На гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ найти точку, для которой:

1) фокальные радиусы перпендикулярны друг к другу;

2) расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.

1.45. Найти точки пересечения прямой $2x$-y-10=0 и гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

1.46. Найти точки пересечения прямой $4x$-$3y$-16=0 и гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$.

1.47. Найти точки пересечения прямой $2x$-y+1=0 и гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

1.48. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+m$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.49. К данной гиперболе $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$ провести касательную:

1) параллельно прямой $x+y$-7=0;

2) параллельно прямой x-$2y$=0;

3) перпендикулярно прямой x-$2y$=0.

1.50. Написать уравнение прямой, которая касается гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке (5;-4).

1.51. Написать уравнения касательных к гиперболе $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, проведённых из точки (1;4).

Задачи повышенной сложности

1.52. Зная уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{1}{2} x$ и одну из её точек $M(12;\ 3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы.

1.53. Составить уравнение гиперболы, оси симметрии которой совпадают с осями координат, если дана точка пересечения P(3,2;2,4) одной из асимптот с одной из директрис этой гиперболы.

1.54. Доказать, что фокусы гиперболы расположены по разные стороны от любой её касательной.

1.55. Найти вершины квадрата, который вписан в гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, и исследовать, в какие гиперболы можно вписать квадрат.

1.56. Найти геометрическое место середин фокальных радиусов, проведённых из правого фокуса ко всем точкам гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1.57. Через вершину $A(a;0)$ гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведены всевозможные хорды, найти геометрическое место их середин.

1.3. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, равноудалённых от постоянной точки – *фокуса* параболы – и постоянной прямой – *директрисы* параболы.

Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что ось абсцисс проходит через фокус параболы перпендикулярно к директрисе и направлена от директрисы к фокусу; начало координат расположено посередине между фокусом и директрисой (рис.1.3.1), то в этой системе координат уравнение данной параболы имеет вид

$$y^2=2px \tag{16}$$

где p - *параметр* параболы - расстояние от фокуса до директрисы ($p>0$).

$F(\frac{p}{2};0)$ – фокус параболы

Уравнение директрисы

$$x=-\frac{p}{2} \tag{17}$$

Парабола имеет одну ось симметрии, которая совпадает, при таком выборе системы координат, с осью Ox. Точка пересечения с осью называется *вершиной* параболы, находится в начале координат. Вся парабола лежит в правой полуплоскости.

Расстояние от любой точки $M(x,y)$ параболы до фокуса называется *фокальным радиусом* (r), может быть вычислен по формуле:

$$r=x+\frac{p}{2} \tag{18}$$

Согласно определению параболы, $\frac{r}{d}=1$, где d обозначает расстояние точки параболы от директрисы.

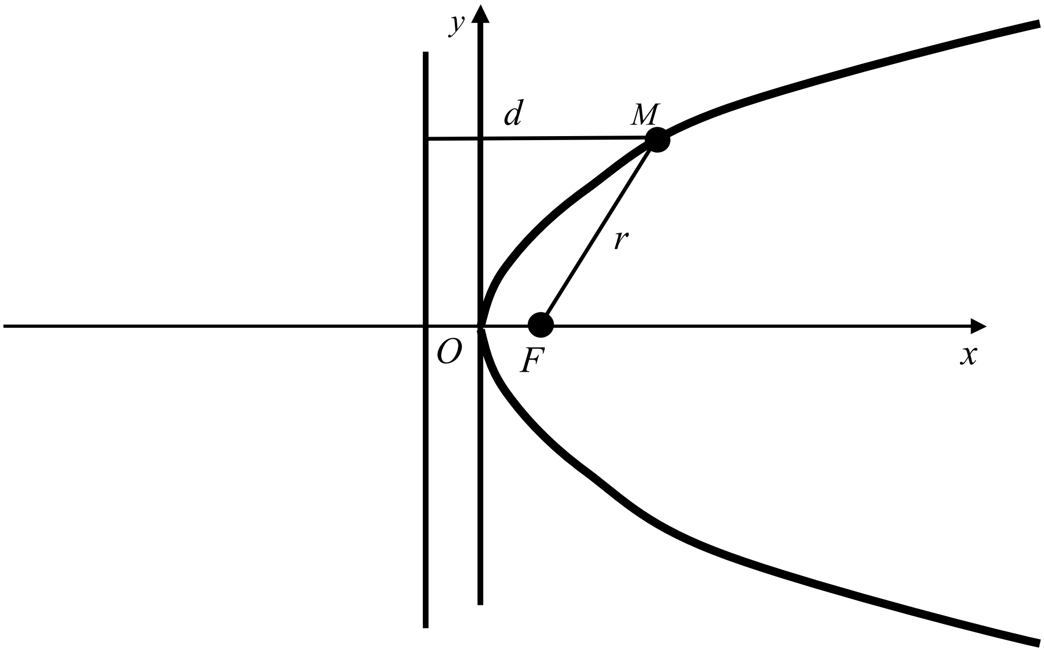

Рис.1.3.1

Уравнение касательной к параболе (16) в точке $N(x_1y_1)$:

$$yy_1=p(x+x_1) \qquad (19)$$

Если координатная система выбрана так, что ось абсцисс совмещена с осью параболы, начало координат - с вершиной, но парабола лежит в левой полуплоскости (рис.1.3.2), то её уравнение имеет вид:

$$y^2=-2px$$

В случае, когда начало координат находится в вершине, а с осью совмещена ось ординат, то в случае, если парабола лежит в верхней полуплоскости (рис.1.3.3), она будет иметь уравнение

$$x^2=2py$$

- если в нижней полуплоскости (рис.1.3.4), то уравнение

$$x^2=-2py$$

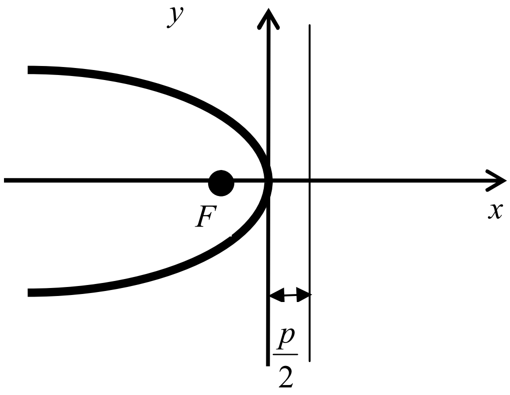

Рис.1.3.2

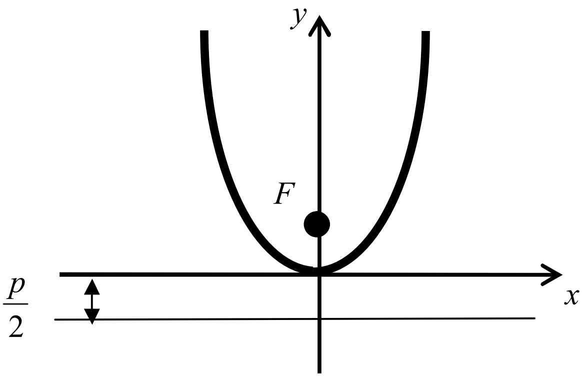

Рис.1.3.3

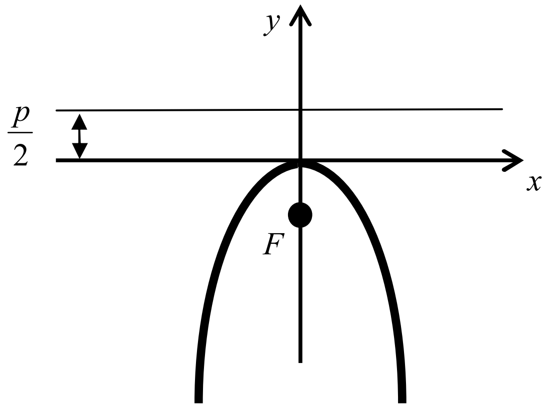

Рис.1.3.4

Примеры решения задач

Пример 1: Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $F(0;-3)$ и проходит через начало координат, зная, что её осью служит ось Oy.

Решение: так как фокус расположен в нижней полуплоскости на оси Oy, уравнение параболы будем искать в виде (рис.1.3.4)

$$x^2 = -2py$$

Найдём значение параметра p, используя то, что фокус от вершины параболы отстоит на расстоянии $\frac{p}{2}$. Вершина данной параболы, по условию, точка $O(0;0)$, тогда $|OF|=3$, значит $\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow \quad p = 6$.

Искомое уравнение параболы имеет вид

$$x^2 = -12y$$

Пример 2: На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 10.

Решение: Фокальный радиус (r) точки параболы может быть вычислен по формуле:

$$r = x + \frac{p}{2}$$

Выразим отсюда x (абсцисса искомой точки):

$$x = r - \frac{p}{2}$$

По условию задачи $r = 10$.

Значение параметра p определим из данного уравнения параболы: $2p=8 \Rightarrow p=4$

Тогда $x = 10 - \frac{4}{2} = 8$. Подставим значение x в данное уравнение параболы и найдём соответствующее значение y: $y = \pm\sqrt{8 \cdot 8} = \pm 8$

Условию задачи удовлетворяют координаты двух точек

(8;8) и (8;-8)

Пример 3: Написать уравнения касательных к параболе $y^2 = 4x$, проведённых из точки $\left(-1; \frac{8}{3}\right)$.

Решение: Уравнение касательной к параболе

$$y^2=2px$$

имеет вид

$$yy_1=p(x+x_1),$$

где $(x_1;y_1)$ – точка касания. Уравнение касательной к данной параболе будет иметь вид

$$yy_1=2(x+x_1)$$

Так как касательная проходит через точку $\left(-1;\frac{8}{3}\right)$, то координаты этой точки должны удовлетворять этому уравнению; подставляя сюда вместо x и y данные координаты, получим

$$\frac{8}{3}y_1 = 2(-1+x_1) \quad \text{или} \quad 8y_1 = 6(-1+x_1)$$

Но точка прикосновения $(x_1;y_1)$ принадлежит данной параболе, поэтому

$$y_1^{\,2} = 4x_1$$

Решая совместно эти два уравнения

$$\begin{cases} 8y_1 = 6(-1+x_1) \\ y_1^{\,2} = 4x_1 \end{cases}$$

Находим два решения

$$x_1' = \frac{1}{9}, \quad y_1' = -\frac{2}{3}; \qquad x_1'' = 9, \quad y_1'' = 6$$

Искомых касательных две: их уравнения получим, подставляя в уравнение

$$yy_1=2(x+x_1)$$

вместо $(x_1;y_1)$ один раз $\frac{1}{9}$ и $-\frac{2}{3}$; другой раз 9 и 6:

$$-\frac{2}{3}y=2(x+\frac{1}{9}), \quad 6y=2(x+9)$$

Упрощая, получим уравнения касательных

$$9x+3y+1=0, \quad x-3y+9=0$$

Задачи для самостоятельной работы

1.58. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2=6x;$
2) $x^2=5y;$
3) $y^2=-4x;$
4) $x^2=-y.$

1.59. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости, симметрично относительно оси Ox, и её параметр $p=3$;
2) парабола расположена в левой полуплоскости, симметрично относительно оси Ox и её параметр $p=0{,}5$;
3) парабола расположена в верхней полуплоскости, симметрично относительно оси Oy и её параметр $p=\frac{1}{4}$;
4) парабола расположена в нижней полуплоскости, симметрично относительно оси Oy и её параметр $p=3$.

1.60. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $A(9;6)$;
2) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1;3)$;
3) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $C(1;1)$;
4) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $D(4;-8)$.

1.61. Составить уравнение параболы, зная, что:

1) расстояние фокуса от вершины равно 3;

2) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через начало координат и через точку (1;-4)
3) парабола симметрична относительно оси Oy, фокус помещается в точке (0;2) и вершина совпадает с началом координат;
4) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через начало координат и через точку (6;-2)

1.62. Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7;0)$ и уравнение директрисы $x-7=0$.

1.63. Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2=24x$.

1.64. На параболе $y^2=8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 20.

1.65. На параболе $y^2=16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

1.66. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.

1.67. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=12x$, если ордината точки M равна 6.

1.68. На параболе $y^2=4{,}5x$ взята точка M, находящаяся от директрисы на расстоянии $d=9{,}125$. Вычислить расстояние от этой точки до вершины параболы.

1.69. Определить точки пересечения прямой $x+y-3=0$ и параболы $x^2=4y$.

1.70. Определить точки пересечения прямой $3x+4y-12=0$ и параболы $y^2=-9x$.

1.71. Определить точки пересечения прямой $3x-2y+6=0$ и параболы $y^2=6x$.

1.72. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+m$ касается параболы $y^2=2px$

1.73. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2=8x$ и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.

1.74. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.

1.75. Дана парабола $y^2=12x$. Провести к ней касательную в точке с абсциссой $x=3$.

1.76. Через точку $P(5;-7)$ провести касательную к параболе $y^2=8x$.

1.77. Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$ и параболы $y^2=24x$.

1.78. Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$ и параболы $y^2=3x$.

Задачи повышенной сложности

1.79. Определить общие касательные к параболе $y^2=4x$ и к эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

1.80. Составить уравнения сторон треугольника, вписанного в параболу $y^2=8x$, зная, что одна из его вершин совпадает с вершиной параболы, а точка пересечения высот совпадает с фокусом параболы.

1.81. На параболе $y^2=12x$ взяты три точки, ординаты которых $y_1=6$, $y_2=2$ и $y_3=-3$. Вычислить отношение площадей двух треугольников: треугольника с вершинами в указанных точках и треугольника, образованного касательными в этих точках.

1.82. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой $p=0{,}1\,м$. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии $2\,м$ от места выхода.

1.4 Уравнение эллипса, параболы и гиперболы в полярных координатах

Полярное уравнение общее по форме для эллипса, одной ветви гиперболы и параболы, имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi} \tag{20}$$

где φ, r – полярные координаты произвольной точки линии

p - фокальный параметр (половина фокальной хорды линии, перпендикулярной к её оси)

e – эксцентриситет линии.

Полярная система выбрана так, что полюс находится в фокусе, а полярная ось направлена по оси линии в сторону, противоположную ближайшей к этому фокусу директрисы.

Примеры решения задач

Пример 1: Составить полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, если полярная ось совпадает с осью ох, а полюс с фокусом F_1.

Решение: Полярное уравнение эллипса имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi}$$

Находим эксцентриситет эллипса

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{4}{5}$$

Значит, фокус находится в точке $F_1(-4;0)$. Перпендикуляр к оси ох задан уравнением x=-4. Найдём точки пересечения (M_1и M_2) этого перпендикуляра с эллипсом, решая систему:

$$\begin{cases} x = -4 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}; \quad \Rightarrow y = \pm\frac{9}{5}.$$

тогда

$$M_1(-4;\ \frac{9}{5}) \text{ и } M_2(-4;\ -\frac{9}{5}).$$

Далее, находим значение параметра p, как расстояние между точками F_1 и M_1:

$$p=d(F_1M_1)=\frac{9}{5}.$$

Найденные значения $e=\frac{4}{5}$, $p=\frac{9}{5}$ подставим в полярное уравнение.

$$r = \frac{9/5}{1-\frac{4}{5}\cdot\cos\theta} \quad \text{или} \quad r = \frac{9}{5-4\cdot\cos\theta}$$

Задачи для самостоятельной работы

1.83. Составить полярное уравнение правой ветви гиперболы, если дано её каноническое уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в правом фокусе гиперболы:

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

1.84. Дано уравнение параболы $y^2=6x$. Составить её полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

1.85. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Составить его полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

1) в левом фокусе эллипса;

2) в правом фокусе.

1.86. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. Составить полярное уравнение её левой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе гиперболы.

1.87. Определить, какие линии даны следующими уравнениями в полярных координатах:

1) $r=\frac{5}{1-\frac{1}{2}\cdot\cos\theta}$; 2) $r=\frac{6}{1-\cos\theta}$; 3) $r=\frac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\varphi}$;

4) $r=\frac{12}{2-\cos\varphi}$; 5) $r=\frac{5}{3-4\cdot\cos\theta}$; 6) $r=\frac{1}{3-3\cos\varphi}$.

1.88. Составить каноническое уравнение гиперболы, если дано его уравнение в полярных координатах $r=\frac{9}{4-5\cdot\cos\theta}$

1.89. Составить каноническое уравнение параболы, если дано его уравнение в полярных координатах $r=\frac{6}{1-\cos\theta}$

1.90. Установить, что уравнение $r=\frac{144}{13-5\cos\varphi}$ определяет эллипс, и найти его полуоси.

1.91. Установить, что уравнение $r=\frac{18}{4-5\cos\varphi}$ определяет правую ветвь гиперболы, и найти её полуоси.

Задачи повышенной сложности

1.92. На параболе $r = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ найти точки:

1) с наименьшим полярным радиусом;

2) с полярным радиусом, равным параметру параболы.

1.93. Дано уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Составить его полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре эллипса.

1.94. Дано уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Составить её полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре гиперболы.

1.95. Дано уравнение параболы $y^2 = 2px$. Составить её полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в вершине параболы.

МОДУЛЬ 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ЗАДАННЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

Кривая, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением второй степени, называется кривой второго порядка. Общее уравнение второй степени (с двумя переменными) имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0 \qquad (21)$$

в матричной форме

$$X^t AX + 2LX + a_0 = 0,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$

Центром некоторой кривой называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично парами. Кривые второго порядка, обладающие единственным центром, называются центральными.

Точка S (x_0, y_0) является центром кривой, определяемой уравнением (21), в том и только том случае, когда её координаты удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

2.1. Способы приведения кривых второго порядка к каноническому виду

1) Метод *выделения полных квадратов*

если в уравнении (21) $a_{11} = a_{22} = 0$, то используем замену

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$

$$a_{11}\left(x^2+2x\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y+\frac{a_1}{a_{11}}\right)+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y+\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2\right)-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}y^2-2\frac{a_{12}a_1}{a_{11}}y-\frac{a_1^2}{a_{11}}+a_{22}y^2+2a_2y+a_0=$$

$$a_{11}\left(x+\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}y+\frac{a_1}{a_{11}}\right)\right)^2+y^2\left(a_{22}-\frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)+2\left(a_2-\frac{a_{12}a_1}{a_{11}}\right)y+\left(a_0-\frac{a_1^2}{a_{11}}\right)=a_{11}x'^2+a_{22}'y^2+2a_2'y+a_0'=$$

$$=a_{11}x'^2+a_{22}'\left(y^2+\frac{2a_2'}{a_{22}'}y+\left(\frac{a_2'}{a_{22}'}\right)^2\right)-\frac{a_2'^2}{a_{22}'}+a_0'=a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_0''=0$$

2) Если в уравнении (21) a_{12}=0, то используем *параллельный перенос системы координат* в новое начало координат (x_0, y_0): в центр кривой - для центральных кривых и в вершину для нецентральных кривых, с помощью замены

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \tag{23}$$

3) При помощи *поворота ДПСК* на угол φ, найденный из уравнения $tg2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$ по формулам

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned} \tag{24}$$

затем с помощью параллельного переноса избавиться от линейной части.

4) С помощью *ортогональных преобразований.*

Найдем ортонормированный базис, в котором матрица A диагональна. Для этого:

1. Вычисляем λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения $det(A-\lambda E)=0$;

2. Для каждого λ составляем систему уравнений $(A-\lambda E)f=0$, находим координаты собственных векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2$;

3. Нормируем полученные решения

$$\overline{e'}_1 = \frac{\overline{f}_1}{\left|\overline{f}_1\right|} = \{e_{11}, e_{12}\},\ \overline{e'}_2 = \frac{\overline{f}_2}{\left|\overline{f}_2\right|} = \{e_{21}, e_{22}\};$$

4. Составляем матрицу перехода C, в которой координаты полученных векторов записываем в столбцы

$$C = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix} \tag{25}$$

В новом базисе матрица A' диагональная, на её главной диагонали расположены корни характеристического уравнения. Коэффициенты при линейных членах преобразованного уравнения вычисляем по формуле $L' = LC$.

В новом базисе уравнение исходной кривой не содержит произведений переменных и имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a_0 = 0 \tag{26}$$

Если в уравнении (26) имеются квадраты переменных и одноимённые линейные члены, то выделяем полный квадрат и переносим начало координат так, чтобы в преобразованном уравнении соответствующих линейных членов не было.

Применяя алгоритм, изложенный выше, на каждом этапе мы получаем координаты нового начала не в исходной, а в промежуточной системе координат. *Система координат считается определённой, если вычислены координаты её начала и базисных векторов относительно первоначально заданной системы координат.*

5) *Определение типа кривой с помощью ортогональных инвариантов:*

$S = a_{11} + a_{22}$ след матрицы

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ малый определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$ большой определитель

Тип кривой можно определить из таблицы:

	$\Delta = 0$ распадающиеся кривые	$\Delta \neq 0$ нераспадающиеся
$\delta < 0$ центральные кривые гиперболического типа	Две действительные пересекающиеся прямые	Гипербола
$\delta = 0$ нецентральные кривые	Параллельные прямые (действительные, мнимые или совпадающие)	Парабола
$\delta > 0$ центральные кривые эллиптического типа	Две мнимые прямые, пересекающихся в действительной точке	Эллипс, при $S \cdot \Delta < 0$ Мнимый эллипс, при $S \cdot \Delta > 0$

Собственные значения находим из характеристического уравнения $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$

Каноническое уравнение центральной кривой:

$$\frac{x'^2}{\left(-\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}\right)} + \frac{y'^2}{\left(-\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}\right)} = 1 \qquad (27)$$

Каноническое уравнение параболы:

$$y''^2 = 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} \cdot x'' \qquad (28)$$

Если $\Delta = 0$, то уравнение распадающейся кривой

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0 \qquad (29)$$

2.2. Ортогональная классификация кривых второго порядка.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ мнимый эллипс

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ две мнимые прямые, пересекающихся в действительной точке (0;0) (вырожденный эллипс)

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола

5) $y^2-a^2x^2=0$ две действительные пересекающиеся прямые

6) $y^2=2px$ парабола

7) $y^2=a^2$ две параллельные прямые

8) $y^2=-a^2$ две мнимые параллельные прямые

9) $y^2=0$ две совпадающие прямые

Примеры решения задач

*Пример 1:*Дана кривая $x^2+6x-8y+1=0$. Найти преобразованное уравнение этой кривой после переноса в точку (-3;-1)

Решение: используя формулу (23) сделаем замену

$$\begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-1 \end{cases}$$

и подставим в исходное уравнение

$$(x'-3)^2+6(x'-3)-8(y'-1)+1=0;$$

Раскроем скобки, упростим

$$x'^2-6x'+9+6x'-18-8y'+8+1=0 \quad \text{или} \quad x'^2-8y'=0$$

Ответ: парабола $x'^2=8y'$

Пример 2: Найти каноническую систему координат и написать каноническое уравнение кривой $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$. Изобразить на чертеже.

Решение: Для решения будем использовать ортогональные преобразования

Найдем корни характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$\lambda^2-13\lambda+36=0. \text{ Отсюда, } \lambda_1=4 \text{ и } \lambda_2=9.$$

Найдем собственный вектор $\overline{f}_1(u,v)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=4$ из уравнения

$$(\text{A-}\lambda\text{E})\overline{f_1}=0,\quad \begin{pmatrix} 5\text{-}4 & 2 \\ 2 & 8\text{-}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=0,\quad \begin{cases} u+2v=0 \\ 2u+4v=0 \end{cases}, \text{ т.е. } u=-2v$$

Пусть $u=2$; $v=-1$. Т.е. $\overline{f}_1=\{2;-1\}$, нормируем его

$$\overline{e'}_1=\left\{\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2}};-\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right\}=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

Аналогично, для $\lambda_2=9$ находим $\overline{e'}_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$.

Матрица перехода имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

тогда формулы преобразования координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (*).$$

Посчитаем коэффициенты при линейных членах преобразованного уравнения

$$L' = LC = \begin{pmatrix} -16 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{72}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

В новом базисе получим уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{144}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Выделим полные квадраты

$$4(x'^2 - 2\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{5}) - \frac{4}{5} + 9(y'^2 - 2\frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{64}{5}) - \frac{576}{5} + 80 = 0$$

$$4(x' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 9(y' - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 - 36 = 0$$

сделаем замену

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{5}};\ y'' = y' - \frac{8}{\sqrt{5}} \qquad (**),$$

Тогда уравнение кривой примет вид

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1$$

получили каноническое уравнение эллипса.

Найдём формулы преобразования координат. Из равенств (**) выразим x', y':

$$x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{5}};\ y' = y'' + \frac{8}{\sqrt{5}} \quad \text{или}$$

в матричном виде $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, подставим в формулу (*)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: Уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, в системе координат O' (2;3),

$\overline{e'}_1 = \left\{ \frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$, $\overline{e'}_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right\}$ (координаты точки O' и векторов $\overline{e'}_1$ и $\overline{e'}_2$ вычислены в исходной системе координат *Oxy* (рис 2.1.1))

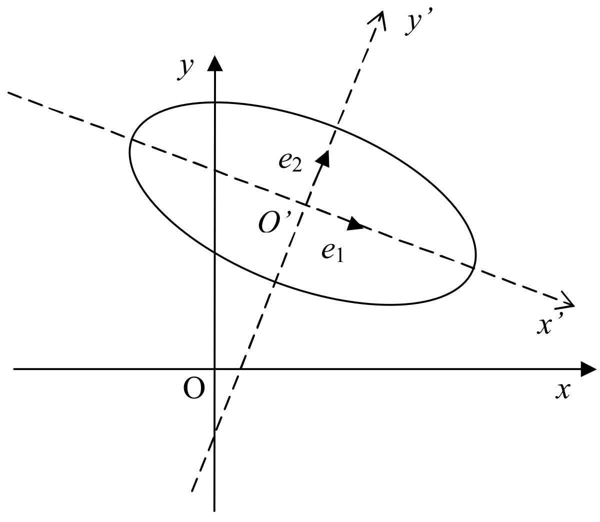

Рис.2.1.1

Пример 3: С помощью ортогональных инвариантов определить тип кривой $5x^2+3y^2+40x-6y+98=0$ и написать канонический вид.

Решение: Матрица из коэффициентов квадратичной части

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Инварианты

$S=5+3=8$; $\delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 15$; $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 3 & -3 \\ 20 & -3 & 98 \end{vmatrix} = 225$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0, \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5,$$

подставим в формулу (27)

$$\frac{x'^2}{\left(-\frac{225}{3\cdot 15}\right)} + \frac{y'^2}{\left(-\frac{225}{5\cdot 15}\right)} = 1$$

Ответ: $\frac{x'^2}{-5} + \frac{y'^2}{-3} = 1$ или $\frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{3} = -1$ мнимый эллипс

Задачи для самостоятельного решения:

2.1. Установить, какие из следующих линий являются центральными (найти координаты центра), какие не имеют центра, какие имеют бесконечно много центров (составить уравнение геометрического места центров):

1) $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$;
2) $4x^2-4xy+y^2-6x+8y+13=0$;
3) $x^2-6xy+9y^2-12x+36y+20=0$;
4) $5x^2+4xy+2y^2+20x+20y-18=0$;
5) $4x^2+4xy+y^2-8x-4y-21=0$;
6) $4x^2-20xy+25y^2-14x+2y-15=0$.

2.2. С помощью параллельного переноса осей координат установить, какая линия определяется каждым из следующих уравнений:

1) $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$;
2) $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$;
3) $3y^2-12x-6y+11=0$;
4) $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$;
5) $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$.

2.3. Определить тип линии, написать её каноническое уравнение:

a) методом выделения полных квадратов;

b) с помощью ортогональных инвариантов;

c) с помощью ортогональных преобразований найти каноническую систему координат:

1) $2xy+3x-y-2=0$;
2) $2xy-6x+4y-1=0$;
3) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;
4) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$;
5) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$;
6) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;
7) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$;

8) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

9) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;

10) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$;

11) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$;

12) $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$;

13) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$;

14) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;

15) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$;

16) $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$;

17) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$;

18) $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$;

19) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$;

20) $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$.

Задачи повышенной сложности

2.4. Линия второго порядка определяется уравнением

$$x^2-2y+\lambda(y^2-2x)=0.$$

Определить тип линии при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$ и найти её расположение относительно данной системы координат.

2.5. Найти фокусы и соответствующие им директрисы линий второго порядка:

(1) $6xy-8y^2+12x-26y-11=0$;

(2) $x^2+4xy+4y^2+8x+6y+2=0$.

2.6. Пользуясь инвариантами S, δ, Δ, найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линия второго порядка бала равносторонней гиперболой, и написать её каноническое уравнение.

Ответы и указания

1.1. 1) 5 и 3; 2) F_1(-4;0), F_2(4;0); 3) $e=\frac{4}{5}$; 4) . $x=-\frac{25}{4}, x=\frac{25}{4}$ **1.2.** 1) 1 и 4; 2) $F_1\left(0;-\sqrt{13}\right)$, $F_2\left(0;\sqrt{13}\right)$; 3) $e=\frac{\sqrt{13}}{4}$; 4) . $y=-\frac{16}{\sqrt{13}}, x=\frac{16}{\sqrt{13}}$. **1.3.** 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; 4) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; 5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. 6) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. **1.4.** 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$; 5) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. 6) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$. **1.5.** x=-9, x=9; **1.6.** $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$. **1.7.** $\left(-3;\frac{8}{5}\right),\left(-3;-\frac{8}{5}\right)$. **1.8.** $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$. **1.9.** 1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16/3}=1$; 3) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$; 4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$; 5) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{192}=1$; 6) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$. **1.10.** $5x+12y+10=0$, $x-2=0$. **1.11.** $\left(-5;3\sqrt{3}\right),\left(-5;-3\sqrt{3}\right)$. **1.12.** $\left(-2;\frac{\sqrt{21}}{2}\right),\left(-2;-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$. **1.13.** $\left(-\frac{15}{2};\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(-\frac{15}{2};-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. **1.14.** 15. **1.15.** 8. **1.16.** $S=68\frac{4}{7}$ кв. ед. *Указание:* Стороны всякого прямоугольника, вписанного в эллипс, должны быть параллельны его осям. **1.17.** $\left(3;\frac{8}{5}\right)$ - прямая касается эллипса. **1.18.** $\left(4;\frac{3}{2}\right)$, (3;2). **1.19.** Прямая проходит вне эллипса. **1.20.** $k^2a^2+b^2=m^2$. **1.21.** Задача имеет два решения: 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $\left(4;\frac{9}{5}\right)$; 2) $\frac{16x^2}{225}+\frac{y^2}{16}=1$, $\left(\frac{9}{4};\frac{16}{5}\right)$ *Указание:* Для определения параметров эллипса воспользоваться условием касания, выведенным в задаче 1.20. **1.22.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ (см. задачу 1.20). **1.23** $x-2y-8=0$. **1.24.** $y=3$, $12x+7y+51=0$. **1.25.** (6;0), $(\frac{6}{7};\frac{12\sqrt{3}}{7})$, $(\frac{6}{7};-\frac{12\sqrt{3}}{7})$. **1.26.** $a_4=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1.27.** $x\pm 5=0$. **1.28.** $x+y\pm 3=0$ $x-y\pm 3=0$ (см.

задачу 1.20). **1.30.** 1) 3 и 4; 2) F_1(-5;) F_2(5;0); 3) $e=\frac{5}{3}$; 4) $y=\frac{4}{3}x,\ y=-\frac{4}{3}$; 5) $x=-\frac{9}{3},\ x=\frac{9}{3}$. **1.31.** . 1) 3 и 4; 2) F_1(0;-5) F_2(0;5); 3) $e=\frac{5}{4}$; 4) $y=\frac{4}{3}x,\ y=-\frac{4}{3}$; 5) $y=-\frac{16}{5},\ y=\frac{16}{5}$. **1.32. 1)** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; 6) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 8) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 9) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **1.33. 1)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$; 3) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$; 4) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$. **1.34.** 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 2) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$; 3) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$; 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$. **1.35.** 1) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$; 2) x^2-y^2=16; 3) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$. **1.36.** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. **1.37.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. **1.38.** 12. **1.39.** $r_1=9/4$, $r_2=41/4$. **1.40.** 8. **1.41.** 12. **1.42.** $\left(10;\frac{9}{2}\right),\left(10;-\frac{9}{2}\right)$. **1.43.** $\left(-6;4\sqrt{3}\right),\left(-6;-4\sqrt{3}\right)$. **1.44.** 1) $x=\pm 4/5\sqrt{34},\ y=\pm 1{,}8$ (4 точки); 2) $x=9{,}6\ y=\pm 3/5\sqrt{119}$ (2 точки) *Указание:* если фокальные радиусы какой-нибудь точки гиперболы перпендикулярны друг другу, то они вместе с отрезком оси, заключенным между фокусами, образуют прямоугольный треугольник и связаны соотношением $r_1^2+r_2^2=4c^2$. **1.45.** $(6;2),\left(\frac{14}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **1.46.** $\left(\frac{25}{4};3\right)$ - прямая касается гиперболы. **1.47.** Прямая проходит вне гиперболы. **1.48.** $k^2a^2-b^2=m^2$**.** **1.49.** 1) $x+y+3=0\quad x+y-3=0$; 2) действительных касательных нет в этом направлении нет; 3) $2x+y+\sqrt{54}=0\quad 2x+y-\sqrt{54}=0$. **1.50.** x+y=1. **1.51.** x=1, 5x-2y+3=0. **1.52.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$. **1.53.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ и $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$. **1.55.** $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}};\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$ **1.57.** $\frac{(x-a/2)^2}{(a/2)^2}-\frac{y^2}{(b/2)^2}=1$. **1.58.** 1) p=3, в правой полуплоскости симметрично оси *Ox;* 2) p=2,5, в верхней полуплоскости симметрично оси *Oy;* 3) p=2, в левой полуплоскости симметрично оси *Ox;* 4) p=1/2, в нижней полуплоскости симметрично оси *Oy*. **1.59.** 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$; 3) $x^2=\frac{1}{2}y$; 4)

$x^2=-6y$. **1.60.** 1) $y^2=4x$; 2) $y^2=-9x$; 3) $x^2=y$; 4) $x^2=-2y$. **1.61.** 1) $y^2=12x$; 2) $y^2=16x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-18y$. **1.62.** $y^2=-28x$. **1.63.** $F(6;0)$, $x+6=0$. **1.64.** (18; 12) и (18;- 12). **1.65.** (9;12) и (9;-12). **1.66.** 12. **1.67.** 6. **1.68.** 10. **1.69.** (2;1), (-6;9). **1.70.** (-4;6) – прямая касается параболы. **1.71.** прямая и парабола не пересекаются. **1.72.** $p=2mk$. **1.73.** $x+y+2=0$. **1.74.** $2x-y-16=0$. **1.75.** $x+y+3=0$ в точке (3;-6) и $x-y+3=0$ в точке (3;6). **1.76.** $x+y+2=0$ и $2x+5y+25=0$. **1.77.** (6;12) и (6;-12). **1.78.** (10; $\sqrt{30}$), (10; - $\sqrt{30}$), (2; $\sqrt{6}$) (2; -$\sqrt{6}$). **1.79.** $x\pm 2y+4=0$. **1.80.** $x-10=0$; $2x-y\sqrt{5}=0$; $2x+y\sqrt{5}=0$. **1.81.** $x+3y+15=0$ и $x-3y+15=0$ (см. задачу 1.72). **1.82.** $h=5м$. **1.83.** 1) $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$; 2) $r=-\dfrac{144}{5+13\cos\varphi}$. **1.84.** $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$; **1.85.** 1) $r=\dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$; 2) $r=\dfrac{16}{5+3\cos\varphi}$. **1.86.** $r=\dfrac{144}{5+13\cos\varphi}$. **1.87.** 1) эллипс; 2) парабола; 3) ветвь гиперболы; 4) эллипс; 5) ветвь гиперболы; 6) парабола. **1.88.** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. **1.89.** $y^2=12x$. **1.90.** 13 и 12. **1.91.** 8 и 6. **1.92.** 1) $\left(\dfrac{p}{2};\pi\right)$; 2) $\left(p;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(p;-\dfrac{\pi}{2}\right)$. **1.93.** $r^2=\dfrac{b^2}{1-e^2\cos^2\varphi}$. **1.94.** $r^2=\dfrac{b^2}{e^2\cos^2\varphi-1}$ **1.95.** $r=\dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

2.1. 1) (3;-2); 2) не имеет центра; 3) $x-3y-6=0$; 4) (0;-5); 5) $2x+y-2=0$; 6) не имеет центра. **2.2.** 1) эллипс, большая полуось равна 4, малая полуось равна 3, центр (3;-2); 2) гипербола, действительная полуось равна 1, мнимая полуось равна 2, центр (2;-3); 3) парабола, параметр равен 2, вершина $\left(\dfrac{2}{3};1\right)$; 4) эллипс, большая полуось равна 5, малая полуось равна 3, центр (2;-3). **2.3.** 3) гипербола $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$, $O'(1;1)$, $\overline{e_1'}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{13}};\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{-\dfrac{2}{\sqrt{13}};\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right\}$; 4) парабола $y'^2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3;2)$, $\overline{e_1'}=\left\{-\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}};-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right\}$; 5) параллельные прямые $2x-3y+1=0$, $2x-3y-2=0$; 6) эллипс $\dfrac{x'^2}{2}+\dfrac{y'^2}{1}=1$, $O'\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{2}{5}\right)$, $\overline{e_1'}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}};\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$; 7) гипербола $O'(2;-1)$, $\overline{e_1'}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{10}};\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{10}};\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right\}$; 8) парабола $y'^2=4\sqrt{2}x'$,

$O'(2;1)$, $\overline{e_1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 9) пересекающиеся прямые $2x+3y-5=0$, $x-4y+2=0$; 10) параллельные прямые $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$; 11) эллипс $\frac{x'^2}{35}+\frac{y'^2}{35}=1$, $O'\left(\frac{7}{6};\frac{1}{3}\right)$, $\overline{e_1'}=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$; 12) гипербола $\frac{x'^2}{8/9}-\frac{y'^2}{9/5}=1$, $O'(0;1)$, $\overline{e_1'}=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$; 13) парабола $y'^2=10x'$, $O'(-1;2)$, $\overline{e_1'}=\left\{\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right\}$; 14) пересекающиеся прямые $x+y-2=0$, $3x-2y+1=0$; 15) параллельные прямые $2x-3y-2=0$, $2x-3y-8=0$; 16) эллипс $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'(0;1)$, $\overline{e_1'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; 17) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'(1;1)$, $\overline{e_1'}=\left\{\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$; 18) парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(2;3)$, $\overline{e_1'}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$, $\overline{e_2'}=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$; 19) пересекающиеся прямые $2x+5y+1=0$, $2x+3y-5=0$; 20) параллельные прямые $2x+y+3=0$, $2x+y+5=0$. **2.4.** При $-\infty<\lambda<-1$ - гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Ox; при $\lambda=-1$ - две пересекающиеся прямые $x-y=0$, $x+y+2=0$; при $-1<\lambda<0$- гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Oy; при $\lambda=0$ – парабола $x^2=2y$; при $\lambda>0$- эллипс $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$.

2.5. 1) $F_1(-2;1)$, $F_2(0;-5)$, $x-3y-4=0$, $x-3y-6=0$; 2) $F\left(-\frac{1}{5};-\frac{9}{10}\right)$, , $4x-2y-3=0$. **2.6.** $S=0$, $\Delta\neq 0$, $x^2-y^2=|\Delta|\cdot|\delta|^{-3/2}$

Использованная литература

1. Беклемешев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: Ученое пособие для вузов / Д.В. Беклемешев. - М.: Наука, 1976. – 320 с.
2. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия [Текст]: Учебное пособие для студентов физических специальностей и специальности «Прикладная математика» / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. - М.: Физматлит, 2001. - 240 с.
3. Канатников, А.Н. Аналитическая геометрия [Текст]: Учебник для втузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 388 с.
4. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: Учебное пособие для втузов / Д.В. Клетеник. - СПб.: Профессия, 2002. – 200 с.
5. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия [Текст]: Учебное пособие для вузов / П.С. Моденов. - М.: МГУ, 1969. – 698 с.
6. Моденов, П.С. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: Учебное пособие для вузов / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. - М.: Наука, 1976. – 186 .
7. Погорелов, А.В. Аналитическая геометрия [Текст]: Учебное пособие для вузов / А.В. Погорелов. - М.: Наука, 1968. – 176 с.
8. Цубербиллер, О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Текст]: Учебное пособие для втузов / О.Н. Цубербиллер. - М.: Наука, 1970. – 336 с.