ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.С. Кутузов, преподаватель кафедры математики и информатики
Троицкий филиал ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a(x)u(x,t), \tag{1}$$

в котором $x \in [0,1]$, $t \geq 0$ и $a(x) \in C^2[0,1]$. Пусть известны следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$u(x_0,t) = g(t); \quad 0 < x_0 < \frac{1}{2}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

а граничное значение $u(1,t)$ функции $u(x,t)$ подлежит определению.

Задача (1)–(4) является некорректно поставленной, поскольку изометричное интегральное преобразование сводит её к задаче вычисления значений неограниченного оператора.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t), g(t) = g_0(t) \in L_2[0,\infty)$ существует точное решение $u_0(1,t) \not\equiv 0$ поставленной задачи, которое принадлежит пространству Соболева $W_2^1[0,\infty)$, причем для этого решения $u_0(1,0) = 0$ и существует число T такое, что при $t \geq T$

$$u_0(1,t) = 0. \tag{5}$$

Кроме того, $u_0(1,t) \in M_r$, где

$$M_r = \left\{ u_0 \in W_2^1[0,\infty) : \|u_0\|_{W_2^1} \leq r \right\}. \tag{6}$$

Однако точные значения $f_0(t)$, и $g_0(t)$ нам неизвестны, а вместо них даны некоторые приближения $f_\delta(t), g_\delta(t) \in L_2\left[0,\infty\right)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \le \delta, \quad \|g_0 - g_\delta\|_{L_2} \le \delta. \tag{7}$$

Требуется, используя исходные данные $f_\delta, g_\delta, \delta,$ и M_r задачи (1)–(4) построить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|u_0 - u_\delta\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t) = u_0(1,t)$.

Методом проекционной регуляризации [1] построено приближенное решения $u_\delta(t)$ поставленной задачи и для любого $t \ge 0$ получена оптимальная по порядку оценка:

$$\|u_\delta - u_0\|^2 \le c_1\delta^2 + c_2 \ln^{-4}\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач/ В.П. Танана // Сиб. журнал вычисл. матем. – 2004. – т.7. – №2. – с. 117–132.