Федеральное агентство по образованию
Троицкий филиал государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические рекомендации
для самостоятельной работы студентов

Троицк 2010

Одобрено методической комиссией экономического факультета Троицкого филиала ГОУ ВПО «ЧелГУ»

Методические рекомендации содержат примеры решения типовых задач; теоретический материал, необходимый для их решения; набор задач для самостоятельной работы студентов

Предназначены для самостоятельной работы студентов специальности 010501 «Прикладная математика и информатика»

Составитель: преподаватель кафедры математики и информатики М.Г.Булатова

Рецензент: к. ф.-м. н., доцент кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры ЧелГУ Н.Д. Зюляркина

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическая геометрия изучает свойства геометрических объектов при помощи аналитического метода, в основе которого лежит так называемый метод координат. Метод координат представляет собой мощный аппарат, позволяющий привлекать для исследования геометрических объектов методы алгебры и математического анализа.

Основные понятия геометрии (точки, прямые линии и плоскости) относятся к числу начальных понятий. Усвоение понятия связано с выделением его составных частей и анализом связей между ними. Одним из важнейших условий усвоения понятия является обеспечение анализа содержания понятия в процессе выполнения упражнений. Получается, что знание понятия создаёт условия для решения задач, а решение достаточного количества задач эти знания углубляют, конкретизируют и закрепляет.

Каждому научному понятию соответствует конкретный алгоритм решения стандартной задачи. При самостоятельном решении 5-6 стандартных задач этот алгоритм, как правило, усваивается.

В данных методических рекомендациях предложена система задач, способствующая процессу усвоения знаний раздела аналитической геометрии – Уравнения прямой на плоскости. Уравнения плоскости. Прямая линия в пространстве. Весь материал разбит на части, содержащие более мелкие логически завершенные порции материала (параграфы). В начале каждого приводятся обозначения, формулы и примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения. Изучив содержание, и, прорешав задачи одного параграфа, можно переходить к следующему. В конце каждого параграфа предусмотрено машинное тестирование (самотестирование) в рамках тестовой оболочки «Айрен».

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

§1.Общее уравнение прямой на плоскости. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, в отрезках. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Общее уравнение прямой

$$Ax+By+C=0\text{, где } A^2+B^2\neq 0. \tag{1}$$

Общее уравнение прямой с нормальным вектором $\boldsymbol{n}=\{A,B\}$ и проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{2}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \tag{3}$$

где $k=tg\varphi$ - угловой коэффициент

b - величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy, считая от начала координат

Уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеет угловой коэффициент k

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{4}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ или *канонические уравнения прямой,* где $\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ координаты направляющего вектора

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{5}$$

Параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеет направляющий вектор $\boldsymbol{s}=\{l,m\}$

$$\begin{cases} x=x_0+l\cdot t \\ y=y_0+m\cdot t \end{cases} \tag{6}$$

Угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 *и* k_2

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (7)$$

Признак параллельности двух прямых

$$k_1 = k_2.$$

Признак перпендикулярности двух прямых

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (8)$$

где $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$ - отрезки, отсекаемые на осях.

Площадь треугольника ABC, с вершинами в точках $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ *и* $C(x_3;y_3)$

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

правая часть этой формулы равна +S в том случае, когда кратчайший поворот отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{AC}$ положителен.

ПРИМЕР: Даны вершины треугольника $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Составить

1) параметрические и канонические уравнения трёх сторон[1];

2) в общем виде уравнение медианы AE и высоты AD;

3) внутренний угол при вершине A.

Решение:

1)Найдём направляющий вектор стороны AB:

$\overline{AB} = \{2-(-2);4-0\} = \{4;4\}$, для составления параметрических уравнений стороны AB, используем координаты точки A и вектора $\overline{AB}$ по формуле (6) получаем

[1] Здесь и везде в дальнейшем под уравнением сторон мы будем понимать уравнения прямых, на которых лежат стороны.

$\begin{cases} x = -2 + 4 \cdot t \\ y = 0 + 4 \cdot t \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -2 + 4 \cdot t \\ y = 4 \cdot t \end{cases}$ - параметрические уравнения стороны *AB*

Аналогично для сторон *BC* и *AC:*

$\overline{BC} = \{4\text{-}2;0\text{-}4\} = \{2;-4\}$ $\overline{AC} = \{4\text{-}(-2);0\text{-}0\} = \{6;0\}$

$\begin{cases} x = 2 + 2 \cdot t \\ y = 4 - 4 \cdot t \end{cases}$ параметрические уравнения стороны BC.

$\begin{cases} x = 4 + 6 \cdot t \\ y = 0 \end{cases}$ параметрические уравнения стороны *AC*.

Чтобы записать уравнения сторон в каноническом виде воспользуемся формулой (5). для стороны *AB* подставим координаты направляющего вектора $\overline{AB}$ и вместо $(x_1;y_1)$ координаты точки *A*, получим

$\frac{x+2}{4} = \frac{y-0}{4}$ или $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{4}$ канонические уравнения стороны *AB*.

Аналогично для сторон BC и AC:

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-4}$ канонические уравнения стороны *BC*.

$\frac{x+2}{6} = \frac{y-0}{0}$ или $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{0}$ канонические уравнения стороны *AC*.

2) Найдем координаты точки *E*, как середину отрезка *BC*

$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ $y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$ *E* (3;2),

по формуле (5) для точек *A* и *E* получаем $\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{2-0}$; $2(x+2)=5y$; $2x-5y+4=0$ общее уравнение медианы *AE*.

Так как высота *AD* перпендикулярна стороне *BC* воспользуемся признаком перпендикулярности двух прямых $k_{AD} \cdot k_{BC} = -1$.

Перепишем канонические уравнения стороны *BC* в общем виде, получим $2x+y-8=0$, выразим отсюда *y*, получим уравнение стороны *BC* с угловым коэффициентом k_{BC}. в виде $y=-2x+8$, отсюда $k_{BC} = -2$, значит $k_{AD} = \frac{1}{2}$, по формуле (4), для координат точки A и k_{AD} получим $y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x+2)$;

$2y = x+2$ или $x-2y+2=0$ уравнение высоты AD.

Иначе: нормальный вектор прямой BC $\boldsymbol{n}\{2;1\}$ является направляющим вектором высоты AD, по формуле (5) для координат точки A и вектора $\boldsymbol{n}$, получим $\frac{x+2}{2} = \frac{y-0}{1}$; $x+2=2y$; $x-2y+2=0$ уравнение высоты AD.

3)Угол A образуют прямые AB и AC, с угловыми коэффициентами k_{BC}=-2 и $k_{AC}=0$ по формуле (7) найдём

$$tg\angle A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}} = \frac{1-0}{1} = 1 \qquad \angle A = 45^0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить какие из точек M_1 (3;1), M_2 (2;3), M_3 (6;3), M_4 (-3;-3), M_5 (3;-1), M_6(-2;1) лежат на прямой $2x-3y-3=0$ и какие не лежат на ней.
2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 расположены на прямой $3x-2y-6=0$; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, -2, -6. Определить ординаты этих точек.
3. Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 расположены на прямой $x-3y+2=0$; их ординаты соответственно равны числам 1, 0, 2, -1, 3. Определить абсциссы этих точек.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_1(2;-3) параллельно прямой: 1) $3x-7y+3=0$; 2) $x+9y-11=0$; 3) $16x-24y-7=0$; 4) $2x+3=0$; 5) $3y-1=0$.
5. Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$, $2x+5y+19=0$.
6. Стороны треугольника AB, BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.
7. Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить площадь треугольника.

8. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная её угол и отрезок, отсекаемый на оси оу: а) $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, b=3; б) $\varphi=\frac{\pi}{4}$, b=5.
9. Найти угловой коэффициент прямой и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, зная, что прямая проходит через точки P (2;-8) , Q (-1;7).
10. Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой:

    1) параллельной данной прямой

    2) перепендикулярной к данной прямой.
11. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника.
12. Даны вершины треугольника A(4;6), B(-4;0), C(-1;-4). Составить уравнения

    а) трёх его сторон;

    б) медианы, проведённой из вершины A;

    в) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.
13. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину B(2;-1), а также уравнение высоты $3x-4y+27=0$ и биссектрисы $x+2y-5=0$, проведенных из различных вершин.
14. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину C(4;-1), а также уравнение высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.
15. Определить угол φ , образованный двумя прямыми:

    1) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$;

    2) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;

    3) $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$.
16. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже. Записать уравнение этой прямой в отрезках.

17. Даны прямые: 1)$2x+3y-6=0$; 2) $4x-3y+24=0$; 3) $2x+3y-9=0$; 4)$3x-5y-2=0$. Составить для них уравнения «в отрезках» и построить эти прямые на чертеже.
18. Через точку $M(4;3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.
19. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $C(1;1)$ и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 2.
20. Найти проекцию точки $P(-8;12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;-3)$ и $B(-5;1)$.
21. Найти точку M_1, симметричную точке $M_2(8;-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3;-4)$ и $B(-1;-2)$.

§2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Геометрический смысл неравенства первой степени с двумя неизвестными. Уравнение пучка прямых. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми

Если две прямые заданы общими уравнениями

$A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, (*)

то могут представиться три случая:

а) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ прямые имеют одну общую точку;

б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ прямые параллельны;

в) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямые сливаются, т.е. оба уравнения определяют одну и туже прямую;

г) $A_1A_2+B_1B_2=0$ условие ортогональности этих прямых.

Если эти прямые пересекаются в точке S , то *уравнения пучка прямых* имеет вид

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{10}$$

где β,α-числа, не равные нулю одновременно. (Определяет прямую, проходящую через точку S)

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$, то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от неё («в положительной полуплоскости»), выполнено неравенство $Ax+By+C>0$, а для координат всех точек, лежащих по другую сторону(«в отрицательной полуплоскости», - неравенство $Ax+By+C<0$

Нормальное уравнение прямой

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \tag{11}$$

где p - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат на прямую

α - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направленим оси ox

Если дано общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$, то, чтобы привести его к нормальному виду, нужно все члены этого уравнения умножить на нормирующий множитель μ, определяемый формулой $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ Знак μ выбирается противоположным знаку свободного члена.

Расстояние от точки $A(x', y')$ до прямой $Ax+By+C=0$

$$d=\left|\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{12}$$

Угол между прямыми (*)

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2}} \tag{13}$$

ПРИМЕР 1: Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$ и 1) проходящей через точку $M(2;4)$;

2) параллельной прямой $2x+4y-5=0$.

Решение:

1)подставив координаты точки М в уравнение пучка прямых найдём значение α и β: $\alpha\,(4+12-1)+\beta\,(2-8-4)=0$; $15\alpha-10\beta=0$; $3\alpha=2\beta$;
Пусть $\alpha=2$, $\beta=3$, тогда подставим эти значение в исходное уравнение пучка прямых $2(2x+3y-1)+3(x-2y-4)=0$; $7x-14=0$ или уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых и проходящей через точку M

2)преобразуем исходное уравнение $(2\alpha+\beta)x+3(\alpha-2\beta)y-(\alpha+4\beta)=0$, используя условие параллельности прямых получаем

$\frac{2\alpha+\beta}{2}=\frac{3\alpha-2\beta}{4}$; $4\alpha+2\beta=3\alpha-2\beta$; $\alpha+4\beta=0$; т.е. $\alpha=4$ $\beta=-1$

подставим эти значение в исходное уравнение пучка прямых
$4(2x+3y-1)-1(x-2y-4)=0$, упрощая, получим $x+2y=0$ уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых и параллельной прямой $2x+4y-5=0$.

ПРИМЕР 2: Составить уравнение биссектрис углов, образованных двумя прямыми: $7x-6y+18=0$ и $9x+2y-21=0$. Проверить, что эти биссектрисы перпендикулярны друг другу.

Решение: Искомые биссектрисы являются геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла. Возьмём на биссектрисе любую точку M_1, её расстояния d_1 и d_2 до двух данных прямых должны быть равны между собой, причём для одной биссектрисы d_1 и d_2 будут получаться с одинаковыми знаками, а для другой с противоположными. Обозначим через X и Y текущие координаты биссектрисы, получим

$$d_1=\pm\frac{7X-6Y+18}{\sqrt{85}} \qquad d_2=\pm\frac{9X+2Y-21}{\sqrt{85}}$$

Уравнение первой биссектрисы $\frac{7X-6Y+18}{\sqrt{85}}=\frac{9X+2Y-21}{\sqrt{85}}$ или

$2X+8Y-39=0$

Уравнение второй биссектрисы $-\frac{7X-6Y+18}{\sqrt{85}}=\frac{9X+2Y-21}{\sqrt{85}}$ или $16X-4Y-3=0$

Проверим условие ортогональности: $2\cdot16+8\cdot(-4)=0$, т.е. эти прямые перпендикулярны.

Задачи для самостоятельного решения

22. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:

    1) $x+5y-35=0$, $3x+2y-27=0$;

    2) $14x-9y-24=0$, $7x-2y-17=0$;

    3) $12x+15y-8=0$, $16x+9y-7=0$.

23. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

    1) $3x+5y-4=0$, $6x+10y+7=0$;

    2) $2x-4y+3=0$, $x-2y=0$;

    3) $2x-1=0$, $x+3=0$.

24. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые совпадают:

    1) $3x+5y-4=0$, $6x+10y-8=0$;

    2) $x-y\sqrt{2}=0$, $x\sqrt{2}-2y=0$;

    3) $x\sqrt{3}-1=0$, $3x-\sqrt{3}=0$.

25. Найти центр пучка прямых, данного уравнениями

    $\alpha(2x+3y-1)+\beta(x-2y-4)=0$

26. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых

    $\alpha(x+2y-5)+\beta(3x-2y+1)=0$ и

    1) проходящей через точку $A(3;-1)$;

    2) проходящей через начало координат;

    3) параллельной оси Ox;

    4) параллельной оси Oy;

    5) параллельной прямой $4x+3y+5=0$;

    6) перпендикулярной к прямой $2x+3y+7=0$.

27. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$, $4x+3y-1=0$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=-3$. Решить задачу, не определяя координат точки пересечения данных прямых.
28. Дано уравнение пучка прямых $\alpha(21x+8y-18)+\beta(11x+3y+12)=0$. Найти прямые этого пучка, отсекающие от координатных углов треугольники с площадью, равной 9.
29. Привести к нормальному виду уравнения прямых: $4x-3y+10=0$; $5x+12y-39=0$; $6x+8y-15=0$; $x-2y+3=0$; $x\cdot cos10^0+y\cdot sin10^0+4=0$.
30. Какие из следующих прямых представлены нормальными уравнениями: $3x-2y+7=0$; $2/3\,x-4/7\,y-1=0$; $3/5\,x-4/5\,y-2=0$; $x+1/2\,y-3=0$.
31. Найти расстояние прямой $9x-12y+10=0$ от начала координат.
32. Проверить, что прямые $2x+\sqrt{5}\,y-15=0$ и $\sqrt{11}\,x-5y+30=0$ касаются одного и того же круга с центром в начале координат, и вычислить радиус этого круга.
33. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(4;-1)$ на прямую $12x-5y-27=0$.
34. Найти расстояние точки:

    1) $P_1(4;-2)$ от прямой $8x-15y-11=0$;

    2) $P_2(2;7)$ от прямой $12x+5y-7=0$;

    3) $P_3(-3;5)$ от прямой $9x-12y+2=0$;

    4) $P_4(-3;2)$ от прямой $4x-7y+26=0$;

    5) $P_5(8;5)$ от прямой $3x-4y-15=0$.
35. Даны вершины треугольника: $A(-1/7;-3/28)$, $B(4;3)$ и $C(2;-1)$. Вычислить длину его высот.
36. На оси ординат найти точку, одинаково удалённую от начала координат и от прямой $3x-4y+12=0$.
37. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

38. Вывести уравнение геометрического места точек, отклонение которых от прямой $8x$-$15y$-25=0 равно -2.
39. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $P(3;5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7;3)$ и $B(11;-15)$.
40. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x-7y+5=0$, $5x+5y-3=0$, смежного с углом, содержащим начало координат.
41. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x+2y-11=0$, $3x-6y-5=0$, в котором лежит точка $M(1;-3)$.
42. Не определяя угловых коэффициентов, вычислить угол между прямыми $2x+y-5=0$ и $6x-2y+7=0$
43. Вычислить углы треугольника, стороны которого даны уравнениями: $18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$ и $5x+10y-9=0$.

УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

§3. Параметрические уравнения плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Частные случаи расположения плоскости относительно системы координат. Уравнение плоскости в отрезках. Взаимное расположение плоскостей

Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$-нормальный вектор.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0y_0z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{n}\{A,B,C\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{15}$$

Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{16}$$

где a,b,c- отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях,

$a=-\frac{D}{A}, \quad b=-\frac{D}{B}, \quad c=-\frac{D}{C}$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\ (x_0y_0z_0)$ и имеющей два направляющих вектора с координатами $\{l_1m_1n_1\},\{l_2m_2n_2\}$:

в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + u \cdot l_1 + v \cdot l_2 \\ y = y_0 + u \cdot m_1 + v \cdot m_2 \\ z = z_0 + u \cdot n_1 + v \cdot n_2 \end{cases}, \tag{17}$$

в общем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0\ (x_0y_0z_0)$, $M_1(x_1y_1z_1)$, $M_2(x_2y_2z_2)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Расположение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ относительно системы координат:

$A=0$ плоскость параллельна оси Ox

$D=0$ плоскость проходит через начало координат

$B=0$ плоскость параллельна оси Oy

$C=0$ плоскость параллельна оси Oz

$A=D=0$ плоскость проходит через ось Ox

$B=D=0$ плоскость проходит через ось Oy

$A=B=0$ плоскость перпендикулярна оси Oz

$C=D=0$ плоскость проходит через ось Oz

$A=C=0$ плоскость перпендикулярна оси Oy

$A=B=D=0$, $C\neq 0$ плоскость совпадает с Oxy

$B=C=0$ плоскость перпендикулярна оси Ox

$A=C=D=0$, $B\neq 0$ плоскость совпадает с Oxz

$B=C=D=0, A\neq 0$ плоскость совпадает с Oyz

Взаимное расположение двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

а) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ плоскости параллельны;

б) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ плоскости сливаются, т.е. оба уравнения определяют одну и ту же плоскость;

в) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ условие ортогональности двух плоскостей.

Если плоскость задана уравнением (14), то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от неё (в положительном полупространстве) выполняется неравенство $Ax+By+Cz+D>0$, а для координат всех точек, лежащих по другую сторону от неё (в отрицательном полупространстве) выполняется неравенство $Ax+By+Cz+D<0$

ПРИМЕР 1: Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;1)$ и перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$

Решение: так как вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен плоскости, то этот вектор можно принять за нормальный вектор этой плоскости, т.е. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n}=\{1;-2;4\}$. Подставим координаты точки A и вектора $\boldsymbol{n}$ в формулу (15), получим $1(x-2)-2(y+3)+4(z-1)=0$, упрощая, получим искомое уравнение плоскости $x-2y+4z-12=0$

ПРИМЕР 2: Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-3;1)$ и $B(4;-1;2)$ и перпендикулярно к плоскости $x+y+z-4=0$

Решение: плоскость $x+y+z-4=0$ имеет нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{1;1;1\}$. Так как по условию плоскости перпендикулярны, то этот вектор будет направляющим для искомой плоскости. Т.к. точки A и B принадлежат плоскости, то вектор $\overline{AB}=\{4-2;-1+3;2-1\}=\{2;2;1\}$ также будет являться направляющим для этой плоскости. В формулу (18) подставим координаты точки A и векторов $\boldsymbol{n}$ и $\overline{AB}$, получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(x-2)+(y+3)=0$$

Получили уравнение плоскости x-y-5=0

Задачи для самостоятельного решения

43. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;1;-1)$ и имеет нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{1;-2;3\}$.

44. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{5;0;-3\}$.

45. Точка $P(2;-1;-1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

46. Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$

47. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;4;-5)$ параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1=\{3;1;-1\}$ и $\boldsymbol{a}_2=\{1;-2;1\}$

48. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}=\{3;-1;4\}$.

49. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

50. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

51. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x-z+1=0$, $y=0$.

52. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(1;-1;-2)$ и $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z-5=0$.

53. Установить, что три плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ имеют одну общую точку, и вычислить её координаты.

54. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(6;8;10)$ и отсекающей на осях равные отрезки.

55. Дано уравнение плоскости $x+2y-3z-6=0$. Написать для неё уравнение "в отрезках".

56. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла Oxy.

57. Вычислить объём пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

58. Плоскость проходит через точку $M_1(6;-10;1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$ и на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить для этой плоскости уравнение "в отрезках".

59. Плоскость проходит через точку $M_1(1;2;-1)$ и $M_2(-3;2;1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b=3$. Составить для этой плоскости уравнение "в отрезках".

60. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c=-5$ и перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{n}=\{-2;1;3\}$

61. Составить параметрические уравнения и общее уравнение плоскости, проходящей через точку (2;3;-5) и параллельной векторам, заданными координатами $\{-5;6;4\}$, $\{2;-1;0\}$.

62. Написать общее уравнение плоскости по её параметрическим уравнениям $x=2+3u-4v$, $y=4-v$; $z=2+3u$.

63. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

    1) $2x+3y+4z-12=0$, $3x-6y+1=0$

    2) $3x-2y-3z+5=0$, $9x-6y-9z-5=0$

    3) $2x-y-z-3=0$, $10x-5y-5z-15=0$.

64. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

    1. $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 - 2u + 4v \\ z = 1 + u + 3v \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + 4u \\ y = 3u + v \\ z = 4 + 2u + 2v \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u \\ z = 3 + u - v \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 + 2u + v \\ y = u + 2v \\ z = 1 + 3v \end{cases}$

65. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точку $M_1(2;-3;3)$ параллельно плоскости Oxy;
2) через точку $M_2(1;-2;4)$ параллельно плоскости Oxz;
3) через точку $M_3(-5;2;-1)$ параллельно плоскости Oyz.

66. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через ось Ox и точку $M_1(4;-1;2)$;
2) через ось Oy и точку $M_2(1;4;-3)$;
3) через ось Oz и точку $M_3(3;-4;7)$.

67. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

1) через точки $M_1(7;2;-3)$ и $M_2(5;6;-4)$ параллельно оси Ox;
2) через точки $P_1(2;-1;1)$ и $P_2(3;1;2)$ параллельно оси Oy;
3) через точки $Q_1(3;-2;5)$ и $Q_2(2;3;1)$ параллельно оси Oz.

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§4. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве, заданных каноническими уравнениями. Взаимное расположение прямой и плоскости. Прямая, как пересечение двух плоскостей.

Уравнение прямой, с направляющим вектором $\mathbf{s}=\{l;m;n\}$ и проходящей через точку $M_0(x_0y_0z_0)$:

каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \qquad (20)$$

параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cdot t \\ y = y_0 + m\cdot t \\ z = z_0 + n\cdot t \end{cases}. \qquad (21)$$

Прямая, заданная, как пересечение двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, имеет направляющий вектор **s**

$$\boldsymbol{s}=[\boldsymbol{n_1}\boldsymbol{n_2}]=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Взаимное расположение двух прямых*:*

$$L_1\text{:}\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2\text{:}\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

1) L_1 и L_2 совпадают $\Leftrightarrow$ выполнены условия: $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ и

$$\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{n_1}$$

2) L_1 и L_2 параллельны, но $L_1 \neq L_2$ $\Leftrightarrow$ выполнено $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ и

нарушено $\dfrac{x_2-x_1}{l_1}=\dfrac{y_2-y_1}{m_1}=\dfrac{z_2-z_1}{n_1}$

3) L_1 и L_2 пересекаются $\Leftrightarrow$ выполнено $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$ и

нарушено $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

4) L_1 и L_2 скрещиваются $\Leftrightarrow$ нарушено $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$

Условие перпендикулярности прямых

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

Взаимное расположение прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

1) $Al+Bm+Cn=0$ прямая параллельна плоскости

2) $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ прямая перпендикулярна плоскости

3) $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ прямая лежит на плоскости

*ПРИМЕР 1:*Записать в каноническом виде уравнение прямой $x-2y+5z-4=0$, $3x-2y-z-12=0$

Решение: Прямая, задана как пересечение двух плоскостей. Нормальные вектора этих плоскостей: $\boldsymbol{n_1}=\{1;-2;5\}$, $\boldsymbol{n_2}=\{3;-2;-1\}$. Найдём направляющий вектор прямой $\boldsymbol{s}=[\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}=12i+16j+4k$, т.е. $\boldsymbol{s}=\{3;4;1\}$.

Найдём точку на этой прямой: пусть $z=0$, тогда $\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x-2y-12=0 \end{cases}$ отсюда $x=4$, $y=0$.

Точка (4;0;0) принадлежит прямой, составим канонические уравнения прямой, проходящей через эту точку с направляющим вектором $\boldsymbol{s}$ **,** используя формулу (20), получим $\frac{x-4}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$

ПРИМЕР2: Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ и плоскости $2x-y+z+4=0$

Решение: Рассмотрим взаимное расположение прямой и плоскости: $3\cdot 2+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=3\neq 0$, значит прямая и плоскость пересекается. Перепишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x=2+3t$, $y=-1+2t$, $z=-t$. Подставим эти уравнения прямой в уравнения плоскости, найдём значение параметра t: $2(2+3t)-(-1+2t)+(-t)+4=0$; $3t+9=0$; $t=-3$.

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости подставим значение t в параметрические уравнения прямой: $x=2-3\cdot 3=-7$; $y=-1-2\cdot 3=-7$; $z=3$.

Ответ: (-7;-7;3) - точка пересечения прямой и плоскости.

Задачи для самостоятельного решения

68. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;0;-3)$ параллельно: 1)вектору $\boldsymbol{a}=\{2;-3;5\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) оси Ox; 4) оси Oy; 5) оси Oz.

69. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки:1) (1-2;1),(3;1;-1); 2) (3;-1;0),(1;0;-3); 3) (0;-2;3), (3;-2;1).

70. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;-1;-3)$ параллельно: 1) вектору $\boldsymbol{a}=\{2;-3;4\}$; 2) прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{0}$; 3) прямой $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$

71. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через данные точки: 1) (3-1;2),(2;1;1); 2) (1;1;-2),(3;-1;0); 3) (0;0;1), (0;1;-2).

72. Даны вершины треугольника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$ и $C(4;-7;-2)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины C.

73. Найти проекцию точки $C(3;-4;-2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$; $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$

74. Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ и $M_3(10;-7;1)$.

75. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;3;-5)$ параллельно прямой $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z+3=0$

76. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-6}$, $2x+3y+z-1=0$;

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

77. Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $x-2y+3z-4=0$, $3x+2y-5z-4=0$;

2) $5x+y+z=0$, $2x+3y-2z+5=0$;

3) $x-2y+3z+1=0$, $2x+y-4z-8=0$.

78. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $2x+3y-z-4=0$, $3x-5y+2z+1=0$;

2) $x+2y-z-6=0, 2x-y+z+1=0$.

79. Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны; пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, то написать уравнение плоскости, через них проходящей; если прямые пересекаются, то написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку.

1) $x=1+2t$, $y=7+t$, $z=3+4t$;

$x=6+3t$, $y=-1-2t$, $z=-2+t$;

2) $x=1+2t$, $y=2-2t$, $z=-t$;

$x=-2t$, $y=-5+3t$, $z=4$;

3) $x=2+4t$, $y=-6t$, $z=-1-8t$;

$x=7-6t$, $y=2+9t$, $z=12t$;

4) $x=1+9t$, $y=2+6t$, $z=3+3t$;

$x=7+6t$, $y=6+4t$, $z=5+2t$.

5) $x=t$, $y=-8-4t$, $z=-3-3t$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$$

6) $\begin{cases} x+z-1=0 \\ 3x+y-z+13=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x+2z-8=0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y+4z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y+6z-6=0 \\ 3x+4y+7z=0 \end{cases}$

80. Установить, в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает её; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости.

Прямая	плоскость
1) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0 \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$	$5x-z-4=0$;
2) $\begin{cases} 2x+3y+6z-10=0 \\ x+y+z+5=0 \end{cases}$	$y+4z+17=0$;
3) $\begin{cases} x+2y+3z+8=0 \\ 5x+3y+z-16=0 \end{cases}$	$2x-y-4z-24=0$.

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§5. Геометрический смысл неравенства первой степени с тремя неизвестными. Расстояние от точки да плоскости. Нормальное уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

Если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то для координат всех точек, лежащих по одну сторону от неё («в положительном полупространстве»), выполнено неравенство $Ax+By+Cz+D>0$, а для координат всех точек, лежащих по другую сторону («в отрицательном полупространстве»,- неравенство $Ax+By+Cz+D<0$

Расстояние от точки $A\ (x', y', z')$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\left|\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \qquad (22)$$

Нормальное уравнение плоскости

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0, \qquad (23)$$

где p - расстояние от начала координат до плоскости

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы луча, выходящего из начала координат и пересекающего плоскость

Если дано общее уравнение плоскости (14) то, чтобы привести его к нормальному виду, нужно все члены этого уравнения умножить на нормирующий множитель μ, определяемый формулой $\mu = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ знак μ выбирается противоположным знаку свободного члена

Угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (24)$$

Угол между прямыми $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ и $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$

$$\cos\varphi = \pm \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (25)$$

Угол между прямой $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin\varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (26)$$

Условие ортогональности прямой и плоскости

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Расстояние от точки $A(x_1 y_1 z_1)$ до прямой $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (27)$$

ПРИМЕР 1: Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки (1;2;0) на расстояние $\sqrt{21}$.

Решение: У параллельных плоскостей нормальные векторы коллинеарны, т.е. искомое уравнение плоскости имеет вид $2x+y-4z+D=0$. По условию расстояние d=$\sqrt{21}$. Подставим известные данные в формулу (22):

$\sqrt{21}=\dfrac{|2\cdot 1+2-4\cdot 0+D|}{\sqrt{4+1+16}}$, $21=|4+D|$, т.е. $21=4+D$ или $21=-4-D$. Значит $D=17$ или $D=-25$

Ответ: $2x+y-4z+17=0$; $2x+y-4x-25=0$

ПРИМЕР 2: Найти проекцию точки $A(3;2;-1)$ на прямую $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{2}$

Решение: Составим уравнение плоскости, проходящей через точку *A* перпендикулярно данной прямой $x-3+y-2+2(z+1)=0$, $x+y+2z-5=0$. Найдем точку пересечения прямой и плоскости - это и будет проекция точки *A,* для этого перепишем уравнение прямой в параметрическом виде $x=2+t$, $y=-3+t$, z=2t, подставим в уравнение плоскости $2+t-3+t+2\cdot 2t-5=0$, $t=\dfrac{6}{6}=1$.

Получаем $x=2+1=3$, $y=-3+1=-2$, $z=2$. Ответ (3;-2;2).

ПРИМЕР 3: Найти проекцию прямой $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ на плоскость $x+2y+3z+4=0$.

Решение: Так как проекция лежит в данной плоскости, то $x+2y+3z+4=0$ есть одно из уравнений проекции. Второе уравнение будет уравнением проектирующей плоскости, которая проходит через данную прямую, значит проходит через точку (3;-1;1) и компланарна вектору$\{3;4;1\}$. Так как проектирующая плоскость перпендикулярна плоскости $x+2y+3z+4=0$, значит нормальный вектор$\{1;2;3\}$ будет направляющим для этой плоскости. Итак, уравнение проектирующей плоскости: $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$ или $5x-4y+z-20=0$.

Ответ: уравнения проекции: $\begin{cases} x+2y+3z+4=0 \\ 5x-4y+z-20=0 \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

81. Определить положение точек $A(2;5;1)$, $B(2;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(0;1;-9)$, $E(-1;-3;0)$ относительно плоскости $2x+2y+z+2=0$.
82. Даны две параллельные плоскости $3x+4y+2z-10=0$, $3x+4y+2z+5=0$ и точки A(1;1;1), B(2;0;0), C(5;6;1), D(-4;0;1). Определить положение данных точек относительно данных плоскостей.
83. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам 1,2,3 и отстоящей от точки (3;5;7) на расстояние 4.
84. Составить уравнение биссекторных плоскостей двугранных углов между двумя плоскостями: $7x+y-6=0$, $3x+5y-4z+1=0$.
85. Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oxy плоскостями $x+4y+8z+8=0$, $x-2y+2z+2=0$, $3x+4y+12=0$, найти точку, равноудаленную от этих плоскостей.
86. Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объём куба.
87. На оси Oz найти точку, равноудалённую от точки $M(1;-2;0)$ и от плоскости $3x-2y+6z-9=0$.
88. Доказать, что плоскость $3x-4y-2z+5=0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(3;-2;1)$ и $M_2(-2;5;2)$.
89. Доказать, что плоскость $5x-2y+z-1=0$ не пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(1;4;-3)$ и $M_2(2;5;0)$.
90. Для каждой из следующих плоскостей вычислить углы α,β и γ, образуемые нормалью с осями координат, и расстояние p от начала координат:

1) $x+y\sqrt{2}+z-10=0$; 2) $x-y-z\sqrt{2}+16=0$;
3) $x+z-6=0$; 4) $y-z+2=0$;
5) $x\sqrt{3}+y+10=0$; 6) $z-2=0$;
7) $2x+1=0$; 8) $2y+1=0$;

9) x-2y+2z-6=0; 10) 2x+3y-6z+4=0.

91. Составить уравнение проекции прямой 5x-4y-2z-5=0, x+2z-2=0 на плоскость 2x-y+z-1=0.

92. Найти угол между прямой x+y-z=0, 2x-3y+z=0 и плоскостью 3x+5y-4z+2=0.

93. Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$

94. Найти тупой угол между прямыми x=3t-2, y=0, z=-t+3 и x=2t-1, y=0, z=t-3

95. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;

2) 3y-z=0, 2y+z=0;

3) 6x+3y-2z=0, x+2y+6z-12=0.

96. Через ось Oz провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол $\frac{\pi}{3}$

97. Найти косинусы углов между прямыми

$\begin{cases}3x+y-z+1=0\\3x-y+z=0\end{cases}$ и $\begin{cases}x-y+1=0\\2x+2y-5z+1=0\end{cases}$

98. Вычислить расстояние d точки P(1;-1;-2) от прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

99. Вычислить расстояние d от точки P(2;3;-1) до следующих прямых:

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$;

2) x=t+1, y=t+2, z=4t+13;

3) 2x-2y+z+3=0, 3x-2y+2z+17=0.

100. Убедившись, что прямые $2x+2y-z-10=0$, $x-y-z-22=0$ и $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние d между ними.

101. Составить уравнения проекции прямой $x=3+5t$, $y=-1+t$, $z=4+t$ на плоскость $2x-2y+3z-5=0$.

§6. Пучок плоскостей. Уравнение общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки на прямую

Уравнение пучка плоскостей

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{28}$$

где $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ две различные плоскости α и β - какие угодно числа, одновременно не равные нулю.

Уравнение общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \tag{29}$$

где $l=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$ $m=\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}$ $n=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}$

Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(x_1y_1z_1)$ на прямую $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

$$\begin{cases} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \end{cases}. \tag{30}$$

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

$$d=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}. \qquad (31)$$

Задачи для самостоятельного решения

102. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$: 1) и через точку $M_1(4;-2;-3)$; 2) параллельно оси Ox; 3) параллельно оси Oy; 4) параллельно оси Oz.
103. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ параллельно вектору $\boldsymbol{l}=\{2;-1;-2\}$
104. Определить, принадлежит ли плоскость $4x-8y+17z-8=0$ пучку плоскостей $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$
105. Написать уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(10x-8y-15z+56)+\beta(4x+y+3z-1)=0$ и отстоит от точки $C(3;-2;-3)$ на расстоянии $d=7$.
106. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M_1(-4;-5;3)$ и пересекает прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.
107. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x=3t-7$, $y=2t+4$, $z=3t+4$ и $x=t+1$, $y=2t-8$, $z=-t-12$.

108. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5=0$, $3x-4y+9z+7=0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$

109. Вычислить расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

1) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$; $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$

2) $x=2t-4$, $y=-t+4$, $z=-2t-1$ и $x=4t-5$, $y=-3t+5$, $z=-5t+5$;

3) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$; $x=6t+9$, $y=-2t$, $z=-t+2$.

4) $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x+y+z-9=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$

110. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$; $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$

111. 1) Написать уравнение общего перпендикуляра к двум прямым:

$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$, $\quad\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$

и найти расстояние d между этими прямыми;

2) найти точки пересечения общего перпендикуляра к данным прямым с этими прямыми.

112. Найти точку, симметричную точке (1;2;3) относительно плоскости $2x-2y+3z-5=0$

113. Найти проекцию точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

114. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

Общие задачи на прямую и плоскость

115. Найти расстояние от точки (1;2;5) до прямой $x=t,\ y=1-2t,\ z=3+t$.

116. Найти расстояние от точки (1;3;5) до прямой $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ 3x+y+2z-3=0 \end{cases}$

117. Даны вершины тетраэдра $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$ и $D(4;1;2)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины D на грань ABC и вычислить её длину.

118. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$

119. Найти проекцию прямой $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ на плоскость $x-y+3z+8=0$.

120. Найти точку пересечения

1) прямой $\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x+5y-z-2=0$.

2) прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}$ и плоскости $3x-3y+2z-5=0$.

121. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x+y-3z+1=0$ с прямыми $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{z+1}{2}$ и $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+4}{-6}$

122. При каком значении параметра A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ будет параллельна прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{1}$?

123. Проверить, лежит ли прямая:

1) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ на плоскости $4x+3y-z+3=0$;

2) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-2}{3}$ на плоскости $5x-8y-2z-1=0$.

124. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку (3;1;-2) и через прямую $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$

125. Через прямую $\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

126. Через точку $P(1;0;7)$ параллельно плоскости $3x-y+2z-15=0$ провести прямую так, чтобы она пересекала прямую $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{1}$

127. На прямой $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ найти точку, одинаково удалённую от двух данных точек $A(3;11;4)$ и $B(-5;-13;-2)$.

128. Найти точку, симметричную с точкой $P(4;3;10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$

129. Даны вершины треугольника $A(4;1;-2)$, $B(2;0;0)$, $C(-2;3;-5)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B на противолежащую сторону.

130. Написать уравнение ребер тетраэдра, вершины которого даны своими координатами: $A(0;0;2)$, $B(4;0;5)$, $C(5;3;0)$, $D(-1;4;-2)$.

131. Вычислить углы, образованные противоположными ребрами тетраэдра с вершинами: $A(3;-1;0)$, $B(0;-7;3)$, $C(-2;1;-1)$, $D(3;2;6)$

132. Привести к каноническому виду уравнения прямой $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

133. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых: $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ и $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемешев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [текст]: учебное пособие / Д. В. Беклемешев. - М.: Наука, 1976. - 320с.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [текст]: учебное пособие / Д.В. Клетеник. - СПб.: Профессия, 2002. – 200 с.
3. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия [текст]: учебное пособие / П.С. Моденов. - М.: МГУ, 1969. - 698с.
4. Моденов, П.С. Сборник задач по аналитической геометрии [текст]: учебное пособие / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко - М.: Наука, 1976г. - 186с.
5. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [текст]: учебное пособие /О.Н. Цубербиллер. - М.: Наука, 1970г. - 336с.

Методические указания

Прямая на плоскости
Прямая и плоскость в пространстве

Составитель: Марина Геннадьевна Булатова

Подписано в печать….2004г
Формат 60*84 1/16. Бумага типографская №2
Печать офсетная. Усл.печ.л…Уч.-изд.л…
Тираж   экз. Заказ…

Троицкий филиал ГОУВПО «ЧелГУ»
457100 Челябинская область, г. Троицк, ул. Разина 9.